Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra:	Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Studijní program:	N7503 Učitelství pro 2. stupeň ZŠ
Studijní obor: (kombinace)	matematika - informatika

ŘEŠENÍ KUBICKÝCH ROVNIC
SOLVING CUBIC EQUATIONS

Diplomová práce: 11–FP–KMD–005

Autor:

Daniel Páv

Podpis:

Adresa:

Na Ptákách 722

551 01, Jaroměř

Vedoucí práce: RNDr. Daniela Bittnerová, CSc.

Konzultant:

Počet

stran	grafů	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
119	-	5	7	33	-

V Liberci dne: 31. 12. 2010

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce.

V Liberci dne: 31. 12. 2010

Poděkování

Rád bych poděkoval své vedoucí práce RNDr. Daniele Bittnerové, CSc. za neocenitelnou pomoc a odborné rady, které mi během psaní mé diplomové práce poskytla, a které přispěly ke kvalitnějšímu zpracování této práce. Taktéž si cením její vstřícnosti a trpělivosti, se kterou ke mně a k vedení práce přistupovala.

Dále mé poděkování patří mojí rodině a Petře Jandlové za podporu, kterou mi v mém životě poskytují.

ŘEŠENÍ KUBICKÝCH ROVNIC

PÁV Daniel **DP-2011** **Vedoucí DP:** RNDr. Daniela Bittnerová, CSc.

Anotace

Diplomová práce se zabývá různými metodami řešení kubických rovnic. Na tyto metody je zde nahlíženo jak z pohledu současného, tak i historického. Součástí práce je rovněž metodika vhodná pro řešení kubických rovnic na středních školách.

V práci jsou nejprve vyloženy základní pojmy vztahující se k dané problematice. Dále je podán historický přehled řešení kubických rovnic. Mezi metody řešení, o kterých práce pojednává, patří řešení algebraické, goniometrické, řešení pomocí numerických metod a řešení grafické.

Poslední část je věnována metodice, kdy a jakým způsobem je vhodné toto učivo zařadit do výuky na střední škole. Výběr metod je přizpůsoben schopnostem studentů. Důraz je kladen na jejich aktivní zapojení do výuky prostřednictvím řešení dílčích úkolů. Samotná výuka je popsána pomocí příprav na jednotlivé hodiny.

Klíčová slova: algebraické rovnice, kubické rovnice, algebraické řešení, goniometrické řešení, grafické řešení, numerické metody, metodika

SOLVING CUBIC EQUATIONS

Annotation

This diploma thesis is dealing with various methods of solving cubic equations. These methods are presented not only from a contemporary point of view but also from a historical point of view. There is an important part dealing with methodology suitable for solving cubic equations on secondary schools.

In this diploma thesis there are explained some basic terms dealing with this area of interest. This work is including an overview in a light of history. Into these methods, which are mentioned there, belongs an algebraic and a goniometrical solution, a solution using numerical methods and a graphical solution.

The last part is containing methodology, when and in which way is suitable this curriculum integrate into secondary school plans. Suitable methods for secondary schools are chosen to fit the student's abilities. The main accent is put on student's active work during lessons by way of partial tasks. The realisation is described by using concrete lesson plans.

Key words: algebraic equations, cubic equation, algebraic solution, goniometrical solution, graphical solution, numerical methods, methodology

EN RÉSOLVANT DES ÉQUATIONS CUBIQUES

L’annotation

Ce mémoire de maîtrise aborde diverses méthodes pour résoudre des équations cubiques. Ces méthodes sont considerées du point de vue du courant ainsi que historique. Le memoire fait également partie de la méthodologie appropriée pour résoudre les équitations cubiques dans les lycées.

L´introduction expose les concepts de base relatifs au sujet. En outre, étant donné un aperçu historique de la résolution des équations cubiques Parmi les méthodes de solution, qui traite avec les travaux comprennent la résolution algébrique, trigonométrique, la solution utilisant des méthodes numériques et la solution graphique.

La conclusion est consacrée à la méthodologie, quand et comment ils devraient être inclus dans le curriculum pour l'enseignement du collège. Les méthodes de sélection sont adaptés aux capacités des élèves. L'accent est mis sur leur participation active dans l'enseignement en s'attaquant à des tâches individuelles. L'enseignement lui-même est décrit par le plan de cours.

Mots-clés: les équations algébriques, les équations cubiques, la résolution algébrique, la solution trigonométrique, la solution graphique, les méthodes numériques, la méthodologie

Obsah

Úvod

Každý učitel by měl mít přehled nejen o učivu, které bude později na základní či střední škole vyučovat, ale také o učivu a metodách, které nejsou standardní součástí učebních osnov. Kubické rovnice jsou jednou z opomíjených oblastí, které by bylo vhodné věnovat větší pozornost a uvést ji do praxe.

Na kubické rovnice můžeme v praktickém životě narazit například při popisu fyzikálních dějů. Obvykle v těchto případech bývají řešeny pouze přibližnými metodami, i když existují také obecné vzorce pro nalezení jejich kořenů.

Cílem této práce je některé tyto metody řešení kubických rovnic prostudovat a vyložit. Promyslet také metodiku, jak tuto problematiku zařadit jako obohacení výuky na středních školách.

K dosažení tohoto cíle jsem prostudoval různé způsoby řešení kubických rovnic, které jsem následně zhodnotil z didaktického úhlu pohledu a zvolil nejvhodnější metody, které by mohly být použity ve výuce na středních školách.

1 Kubické rovnice

Obsahem této kapitoly je stručně vyložit pojmy a základní vlastnosti, které se týkají řešení kubických rovnic, a na které se později budeme odkazovat. Definice, věty a jejich komentáře jsou předkládány volně a bez jakékoliv snahy o podání důkazů.

1.1 Mnohočleny

Mnohočlen

Definice 1.1 *(Mnohočlen):* Nechť n je přirozené číslo, a_0, a_1, ..., a_n jsou komplexní (speciálně reálná) čísla. Funkci $f(x)$ definovanou předpisem

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \; a_0 \neq 0, \tag{1.1}$$

nazýváme *mnohočlen* (též *polynom*) v jedné proměnné x. Čísla a_0, a_1, ..., a_n nazýváme (komplexní, reálné) koeficienty mnohočlenu.

Mnohočlen můžeme zobecnit na případ více proměnných, omezíme se však na mnohočleny s jednou proměnnou. Jednotlivé sčítance nazýváme členy mnohočlenu. Mnohočlen s jedním členem se nazývá jednočlen, se dvěma členy dvojčlen apod.

Stupeň mnohočlenu

Definice 1.2 *(Stupeň mnohočlenu):* Nejvyšší mocninu proměnné x v (1.1), u níž je koeficient nenulový, nazveme *stupněm mnohočlenu* $f(x)$. Je-li $a_0 \neq 0$, pak číslo n je stupněm mnohočlenu $f(x)$ a říkáme, že $f(x)$

je n-tého stupně. Mnohočlen, který má všechny koeficienty rovny nule, se nazývá nulový. Takový mnohočlen nemá stupeň.

Kořeny mnohočlenu

Definice 1.3 *(kořen mnohočlenu):* *Kořenem* (nulovým bodem) mnohočlenu (1.1) nazýváme takové komplexní číslo α, pro které platí $f(\alpha)=0.$

Věta 1.1 *(základní věta algebry):* Každý mnohočlen s komplexními (speciálně reálnými) koeficienty stupně $n \geq 1$ má alespoň jeden komplexní kořen.

Věta 1.2 *(kořenový činitel mnohočlenu):* Je-li α kořenem mnohočlenu $f(x)$, pak je mnohočlen $f(x)$ dělitelný lineárním mnohočlenem $x-\alpha$, který nazýváme kořenový činitel mnohočlenu $f(x)$.

Věta 1.3 *(rozklad mnohočlenu v součin kořenových činitelů):* Každý mnohočlen

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\; a_0\neq 0,\; n\geq 1,$$

lze jednoznačně rozložit v součin kořenových činitelů:

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_r)^{k_r},\; k_1+k_2+\ldots+k_r=n.$$

Čísla α_1, ..., α_r, jsou všechny různé kořeny mnohočlenu $f(x)$. Číslo α_1 se nazývá k_1-násobný kořen, číslo α_r se nazývá k_r-násobný kořen mnohočlenu $f(x)$. Jestliže je $k_i=1$, říkáme, že je kořen jednoduchý.

Derivace mnohočlenu

Omezíme se na čistě formální definování derivace polynomu bez použití limitního procesu.

Definice 1.4 *(derivace mnohočlenu): Derivací mnohočlenu* n-tého stupně $(n \geq 1)$

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \; a_0 \neq 0,$$

rozumíme mnohočlen

$$f'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + 2 a_{n-2} x + a_{n-1}.$$

Druhou derivací mnohočlenu $f(x)$ rozumíme mnohočlen

$$f''(x) = n(n-1) a_0 x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_1 x^{n-3} + \ldots + 3 \cdot 2 a_{n-3} x + 2 a_{n-2}.$$

Derivace vyšších řádů bychom mohli definovat analogicky.

Věta 1.4 *(násobnost kořenů mnohočlenu):* Je-li číslo α k-násobným kořenem mnohočlenu $f(x)$, potom je při $k > 1$ $(k-1)$-násobným kořenem první derivace mnohočlenu $f(x)$, při $k = 1$ není α kořenem mnohočlenu $f'(x)$.

1.2 Algebraické rovnice

Algebraické rovnice

Definice 1.5 *(algebraická rovnice):* Nechť je dán mnohočlen

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

kde n je přirozené číslo a $a_0, a_1, ..., a_n$ jsou komplexní (speciálně reálná) čísla. Výraz

$$f(x)=0,$$

kde x je neznámá, nazýváme *algebraickou rovnicí* n-tého stupně s komplexními (reálnými) koeficienty.

Členy mnohočlenu $f(x)$ se nazývají členy algebraické rovnice. Říkáme, že rovnice je v normovaném tvaru, jestliže $a_0 = 1$.

Řešit algebraickou rovnici tvaru $f(x)=0$ znamená nalézt všechny kořeny mnohočlenu $f(x)$, tj. všechna taková čísla α, pro která platí $f(\alpha)=0$. Každé takové číslo α se nazývá řešení příslušné algebraické rovnice $f(x)=0$. Je-li číslo α k-násobným kořenem mnohočlenu $f(x)$, je též k-násobným řešením rovnice $f(x)=0$. Stupněm této rovnice rozumíme stupeň mnohočlenu $f(x)$.

Věta 1.3 nám říká, že každý mnohočlen lze jednoznačně rozložit v součin kořenových činitelů, kde $\alpha_1, ..., \alpha_r$ jsou všechny kořeny mnohočlenu $f(x)$, tedy i algebraické rovnice $f(x)=0$. Neexistuje proto žádný další kořen. Protože pro násobnosti kořenů k_i platí $k_1+k_2+...+k_r=n$, vyslovíme následující větu:

Věta 1.5: Každá algebraická rovnice $f(x)=0$ stupně $n \geq 1$ má právě n komplexních kořenů, jestliže každý kořen počítáme tolikrát, kolik činí jeho násobnost.

Kubické rovnice

Definice 1.6 *(kubická rovnice):* Kubickou rovnicí nazveme algebraickou rovnici třetího stupně tvaru

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,\ a_0 \neq 0. \tag{1.2}$$

Pokud $a_0 = 1,$ pak jde o kubickou rovnici v normovaném tvaru.

1.3 Některé speciální typy algebraických rovnic

Binomické rovnice

Definice 1.7 *(binomická rovnice):* Rovnice tvaru

$$x^n - a = 0, \tag{1.3}$$

kde a je komplexní číslo různé od nuly a n je číslo přirozené, se nazývají *binomické*. Kořeny binomické rovnice se nazývají n-té odmocniny z čísla a a značíme je $\sqrt[n]{a}$.

Věta 1.6: Je-li a komplexní číslo, pak rovnice (1.3) má právě n jednoduchých kořenů $x_1, \ldots, x_n$, přičemž

$$x_{k+1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0,\ 1,\ \ldots, n-1,$$

kde $a = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ je goniometrické vyjádření čísla $a,\ \sqrt[n]{r} > 0.$

Reciproké rovnice

Definice 1.8 *(reciproká rovnice):* Rovnice tvaru

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{1.4}$$

s komplexními koeficienty se nazývá *reciproká*, pokud splňuje následující vlastnosti. Je-li

$$a_k = a_{n-k},\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

potom rovnici (1.4) nazveme kladně reciprokou rovnicí nebo také reciprokou rovnicí I. druhu. Je-li

$$a_k = -a_{n-k},\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

potom rovnici (1.4) nazveme záporně reciprokou rovnicí nebo také reciprokou rovnicí II. druhu.

Každá kladně reciproká rovnice lichého stupně a každá záporně reciproká rovnice sudého stupně má kořen –1. Každá záporně reciproká rovnice má kořen +1.

Odstraníme-li z reciproké rovnice možné kořenové činitele tvaru $x-1,\ x+1,$ dostaneme kladně reciprokou rovnici sudého stupně

$$a_0x^{2m} + a_1x^{2m-1} + \ldots + a_mx^m + \ldots + a_0 = 0,$$

ze které dělením x^m dostaneme

$$a_0\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + a_1\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + \ldots + a_{m-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_m = 0.$$

Substitucí $y = x + \dfrac{1}{x}$ dostaneme rovnici m-tého stupně pro y.

2 Historie

Tato kapitola si klade za cíl stručně historicky shrnout řešení rovnic, zvláště pak rovnic 3. stupně, od chvíle, kdy se první rovnice (nebo úlohy, které vedou podle dnešních metod k řešení pomocí rovnic) objevují v dochovaných historických pramenech, až po současnost. Pro nastínění dané problematiky je vhodné uvést několik základních publikací, vztahující se k historii matematiky, jimiž je tato kapitola inspirována. Jsou to zejména práce ruských autorů Arnošta Kolmana a Adolfa P. Juškeviče a také D. J. Struika nar. v Rotterdamu. Úplný přehled autorů (a také názvy jednotlivých děl) je uveden v seznamu použité literatury.

Matematika je mnohými pro své vlastnosti označována jako královna všech věd. Její historie sahá až hluboko do pravěku. S tím, jak se vyvíjel člověk, jak velké míry abstrakce byl schopen, vyvíjela se i matematika. Mezi první důkazy matematického myšlení můžeme zařadit kost vlka, na které je vyryto 55 zářezů. Nalezl ji Karel Absolon při vykopávkách u Dolních Věstonic v roce 1936 a je považována za tzv. vrubovku – nástroj, na který primitivní člověk pomocí vrubů zaznamenal nějaké množství. Její stáří je odhadováno na 10 – 30 tisíc let. [4]

Už tehdy se pomalu začal utvářet pojem číslo. Další abstrakce umožnila rozvoj matematických operací – nejdříve sčítání a odčítání, později násobení a nakonec i dělení. Vznikají početní soustavy, objevuje se pojem zlomek a pro svoji názornost také pojmy geometrické.

2.1 Starověk

Od 4. tisíciletí př. n. l. se začaly utvářet otrokářské státy v Egyptě a Mezopotámii. S novým uspořádáním společnosti, s rozvojem obchodu, základů stavitelství, lékařství a jiných odvětví vzrostly požadavky na nové znalosti. Matematika v této době sloužila především k praktickým potřebám. Na rozdíl od předchozího období se dochovaly některé písemné památky – mezopotámské hliněné destičky a egyptské papyry. „Ty shrnují jednotlivé poznatky aritmetického, geometrického a algebraického charakteru i řadu početních pravidel, ale podávají tato pravidla bez důkazů. Neexistovala žádná obecná teorie, z níž by se tyto poznatky daly odvodit. Některá pravidla nejsou dokonce ani správná." ([3], str. 11)

Na konci 2. tisíciletí př. n. l. postupně upadá vliv států v Egyptě a mezopotámii a na jeho základech se začínají rozvíjet nová společenská uskupení. Mezi nejvýznamnější patří kultura Starého Řecka. Dále se zaměříme na čínskou, indickou a arabskou matematiku.

2.2 Egyptská matematika

Egypťané z období Staré říše měli relativně dobré matematické znalosti. Je to období stavby pyramid, které jistě vyžadovaly značnou zručnost v počítání s velkými čísly. Počítalo se zde v desítkové číselné nepoziční soustavě. Mezi nejvýznamnější dochované materiály řadíme 2 papyry – Rhindův a moskevský. Byly napsány v době Střední říše ve 2. tisíciletí př. n. l. Je z nich patrné, že Egypťané uměli sčítat a odčítat v podstatě stejně jako je tomu v dnešní době. Násobení a dělení realizovali pomocí zdvojnásobování a půlení. Počítali také se zlomky, především se zlomky kmennými. Mezi geometrickými úlohami nacházíme výpočty ploch a objemů. Číslo π aproximovali zlomkem $\frac{256}{81} \doteq 3{,}16$. [2]

„V egyptských matematických textech nalézáme úlohy, které je možno řešit lineárními rovnicemi. Jsou to příklady na vypočtení neznámého množství, které je zadáno nějakou podmínkou. V těchto úlohách můžeme spatřovat počátky algebry. Úlohy tohoto typu jsou většinou formulovány abstraktně, tj. postrádají jakýkoli praktický kontext. Řešeny jsou metodou chybného předpokladu i přímým dělením.“ ([5], str. 74) U většiny úloh je provedena zkouška. Na některých egyptských papyrech nacházíme i úlohy vedoucí na jednoduché kvadratické rovnice nebo soustavu rovnic. Chybí v nich však lineární člen. S úlohami, které by vedly na rovnice vyšších stupňů – tedy i kubické, se v egyptských dochovaných materiálech nesetkáváme.

2.3 Matematika ve staré Mezopotámii

Mezopotámská matematika, v porovnání s matematikou egyptskou, dosáhla mnohem vyšší úrovně. Alespoň tak můžeme soudit z nemnoha (asi 400) hliněných tabulek s matematickým textem, které se doposud podařilo rozluštit. Celkem jich však bylo nalezeno už 500 000. Sumerové používali postupně několik početních soustav. Nakonec převládl šedesátkový poziční systém. Ten vedl ke značnému zjednodušení početních úkonů. Matematika v Mezopotámii pracovala s čísly přirozenými, šedesátinnými zlomky a smíšenými čísly. Bez problémů se sčítalo a odčítalo, pro násobení a dělení měli Sumerové připravené tabulky násobků a převrácených hodnot. Kromě těchto tabulek se využívaly i tabulky druhých a třetích mocnin, které se uplatnily při řešení úloh, jaké dnes řešíme pomocí kvadratických a kubických rovnic. Z pozdějšího období, kdy Mezopotámii obývali Babyloňané, se dochovaly tabulky s příklady vedoucí na aritmetické a geometrické posloupnosti. Některé tabulky s příklady na jednoduché a složené úrokování dokládají, že se zde čile obchodovalo. [5]

Již v období Chammurabiho (18. století př. n. l.) byly v Mezopotámii řešeny úlohy, které dnes řešíme pomocí lineárních rovnic a jejich soustav. Původ většiny úloh byl geometrický. Také užitá terminologie nebyla algebraická, ale geometrická (neznámé byly označované jako délka, šířka, výška, hloubka apod.). „Babyloňané znali tzv. „Pythagorovu větu“ již více než tisíc let před Pythagorem. Velmi často ji užívali, a tak se stala zdrojem příkladů „kvadratických rovnic“. Řešily se zde také rovnice vyšších stupňů – rovnice 3. stupně a zvláštní typy rovnic 4., 5., 6. stupně, které se dají snadno převést na kvadratické nebo kubické rovnice.“ ([2], str. 55, 59) „Při řešení úloh vedoucích na kvadratické rovnice museli mezopotamští počtáři zvládnout operace se známými i neznámými veličinami. Museli si dobře osvojit i poznatky, které dnes symbolicky zapisujeme vztahy

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \qquad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

Vždy byly řešeny úlohy s konkrétními čísly. Mezopotamští matematici však nikdy nedospěli k obecnému algoritmu pro řešení kvadratické rovnice tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, který odpovídá našemu vzorci

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Bylo to tím, že kořeny rovnice mohla být pouze kladná čísla.“ ([5], str. 265)

Nyní si ukažme, jak mezopotamští počtáři řešili úlohy vedoucí na rovnice kubické. Tyto úlohy také vycházely z geometrických problémů. Nebyl zde dodržován tzv. zákon homogenity, často byly sčítány objemy a obsahy dohromady. Babyloňané se spokojovali vždy s jediným řešením, ačkoliv jich většinou existovalo více. Podívejme se nyní na jednotlivé typy úloh, tak jak je ve své práci předkládá M. Bečvářová. [5]

1. Úloha typu $x^3 = a$.

„Nejjednodušším typem kubické rovnice byla rovnice $x^3 = a$, kde a bylo přirozené číslo, šedesátinný zlomek nebo smíšené číslo. Tato rovnice se řešila pomocí tabulek třetích mocnin, resp. odmocnin, odhadem či výpočtem třetí odmocniny.“ ([5], str. 295) Na jedné z tabulek najdeme úlohu, kterou lze podle [5] přepsat pomocí tří rovnic:

$$x \cdot y \cdot z = 1\frac{1}{2},$$
$$y = x,$$
$$z = 12x.$$

Dosadíme-li z 2. a 3. rovnice za y a z do rovnice 1., získáme rovnici

$$12x^3 = 1\frac{1}{2}.$$

Z této rovnice počtář postupně vypočítal hodnoty x^3, x (nejspíše pomocí tabulky třetích mocnin a odmocnin) a po dosazení také y a z:

$$x^3 = \frac{1}{12}\cdot 1\frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \quad x = \frac{1}{2},$$
$$y = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{1}{2}\cdot 12 = 6.$$

2. Úloha typu $x^3 + x^2 = a$.

„Druhým typem kubických rovnic byla rovnice $x^3 + x^2 = a$. Byla řešena pomocí speciálních tabulek uvádějících součet druhých a třetích mocnin přirozených čísel nebo pomocí aproximace, pokud hodnota a na příslušné tabulce nebyla." ([5], str. 297) Opět uvedeme příklad z [5] upravený dle dnešní symboliky na soustavu rovnic:

$$x \cdot y \cdot z = 1\frac{3}{4},$$
$$y = x,$$
$$z = 12x + 1.$$

Dosadíme-li z 2. a 3. rovnice za y a z do rovnice 1., získáme rovnici

$$12x^3 + x^2 = 1\frac{3}{4}.$$

Úloha se řeší převedením na rovnici $w^3 + w^2 = a$ se substitucí $w = 12x$. Dále dostaneme

$$(12x)^3 + (12x)^2 = 12^2 \cdot 1\frac{3}{4},$$

tedy

$$w^3 + w^2 = 252.$$

Nyní pomocí tabulek součtů 2. a 3. mocnin přirozených čísel vypočteme kořen w; $w = 6$. Vrácením substituce postupně dostaneme

$$x = y = \frac{1}{2}, \qquad z = 7.$$

3. Úlohy převoditelné na lineární nebo kvadratické rovnice.

Některé příklady, které by mohly vést na kubické rovnice, se dají snadno převést na rovnice lineární či kvadratické. Uvedeme si opět dva příklady z ([5], str. 302). První úlohu lze v naší symbolice napsat pomocí tří rovnic:

$$z = 12x,$$
$$x \cdot y + x \cdot y \cdot z = 1\frac{1}{6},$$
$$x = \frac{1}{2}.$$

Dosadíme-li ze 3. rovnice do 1. a poté do 2. rovnice, dostaneme lineární rovnici

$$\frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{2} \cdot y \cdot 6 = 1\frac{1}{6},$$

ze které snadno vypočteme y; $y = \frac{1}{3}$.

Mezopotámský postup je odlišný. Rovnice

$$x \cdot y + x \cdot y \cdot z = 1\frac{1}{6}$$

je vyjádřena rovnicí

$$S + 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot S = 1\frac{1}{6},$$

kde $S = x \cdot y$ je obsah. Potom

$$7 \cdot S = 1\frac{1}{6}, \qquad S = \frac{1}{6},$$

$$y = \frac{S}{x} = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}, \quad z = 12 \cdot x = 6.$$

Druhý příklad lze ze zadání ([5], str. 304) napsat takto:

$$z = 12x,$$

$$x \cdot y + x \cdot y \cdot z = 1\frac{1}{6},$$

$$y = \frac{1}{3}.$$

Dosadíme-li za z a y z 1. a 3. rovnice do rovnice druhé, obdržíme kvadratickou rovnici

$$4x^2 + \frac{1}{3} \cdot x - 1\frac{1}{6} = 0,$$

která má kořeny

$$x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = -\frac{7}{12}.$$

Protože druhý kořen je záporný, což pro svoji geometrickou povahu úlohy není možné, vyhovuje pouze kořen $x_1 = \frac{1}{2}$.

Mezopotámský postup odpovídá řešení rovnice $ax^2 + bx = c$. Odtud

$$x = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)^2 + 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{6}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{12 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

4. Úloha typu $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Babylonské postupy řešení u složitějších úloh, které by vedly na obecný tvar kubické rovnice, tedy takový, kde nechybí lineární ani kvadratický člen, neznáme. Můžeme pouze odhadovat, že počítali pomocí speciálních tabulek nebo jen metodou „zkusmo“. Jako příklad uvedeme úlohu ([5], str. 310), kterou lze zapsat takto:

$$z = 12x,$$
$$x \cdot y + x \cdot y \cdot z = 1\frac{1}{6},$$
$$x - y = \frac{1}{6}.$$

Dosadíme-li za y a z z 1. a 3. rovnice do druhé, dostaneme rovnici

$$12x^3 - x^2 - \frac{1}{6}x - 1\frac{1}{6} = 0.$$

Upravíme si 2. rovnici takto:

$$x \cdot y \cdot (1+z) = 1\frac{1}{6},$$

pak

$$\frac{x}{\frac{1}{6}} \cdot \frac{y}{\frac{1}{6}} \cdot \frac{1+z}{\frac{1}{6}} = \frac{\frac{7}{6}}{12 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3} = 21.$$

Poznámka: Číslo 12 je převodním koeficientem mezi jednotkami loket a gar. Tento postup neumíme vysvětlit. Mezopotámský postup je založen na „vhodném“ rozkladu čísla 21:

$$21 = 3 \cdot 2 \cdot \frac{7}{2} = \frac{x}{\frac{1}{6}} \cdot \frac{y}{\frac{1}{6}} \cdot \frac{1+z}{\frac{1}{6}}.$$

Odtud

$$x = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2},$$
$$y = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3},$$
$$z = x \cdot 12 = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 12 = 6.$$

2.4 Matematika ve Starověkém Řecku

Řecká matematika se zpočátku příliš neodlišovala od matematiky v Egyptě a Mezopotámii. Zaměřovala se na praktické a konkrétní úlohy. Postupem času se však stále více rozvíjí teoretická matematika. Později se obě složky – praktická a teoretická – od sebe oddělují. „Na rozdíl od praktické aritmetiky a geometrie teoretická aritmetika a geometrie neobsahovaly pouze návody na řešení úloh, ale také zdůvodňovaly správnost řešení. Postupem doby bylo nutné přesně vymezovat pojmy a uvádět přesné důkazy. Definitivně se začala v Řecku matematika ustavovat v samostatný vědecký obor od poloviny 6. st. př. n. l. Vyvrcholením byly Eukleidovy „Základy“, které vznikly v helénistickém období přibližně kolem roku 300 př. n. l..“ ([2], str. 73)

Jmenujme tři proslulé matematické problémy, které řečtí matematikové studovali a snažili se je vyřešit. Jsou to:

1. Zdvojení krychle – tj. nalezení hrany krychle, jejíž objem je dvojnásobkem dané krychle.
2. Trisekce úhlu – tj. rozdělení daného úhlu na tři stejně velké části.
3. Kvadratura kruhu – tj. nalezení čtverce o obsahu rovnému obsahu daného kruhu.

Tyto problémy, jak se později ukázalo, nelze řešit geometricky bez aproximace. Staly se ale prostředkem k objevování nových matematických pojmů – kuželoseček, některých kubických křivek, křivek 4. řádu a transcendentní křivky kvadratrix. [1]

Poznámka: 1. a 2. úlohu můžeme vyjádřit algebraicky kubickými rovnicemi. Problému zdvojení krychle odpovídá rovnice

$$x^3 = 2a^3 \quad \text{čili} \quad x = a\sqrt[3]{2}.$$

Pokud $a = 1$, dostaneme rovnici

$$x^3 - 2 = 0.$$

Problém trisekce úhlu můžeme vyjádřit algebraicky několika způsoby. Například lze vyjít ze vzorce

$$\mathrm{tg}3\varphi = \frac{3\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}^3\varphi}{1 - 3\mathrm{tg}^2\varphi}.$$

Pokud položíme

$$\mathrm{tg}3\varphi = a, \quad \mathrm{tg}\varphi = x,$$

dostaneme úplnou kubickou rovnici

$$x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0.$$

Zajímavý přehled starších metod řešení těchto problémů podává ve své knize L. Seifert [19].

Vedle budování základů geometrie se v matematice starého Řecka objevují také první základy teorie čísel a antická forma integrálních a diferenciálních metod.

Ani Řekové, stejně jako předtím Babyloňané či Egypťané zpočátku neužívali algebraickou symboliku. Přesto řešili i úkoly, které řadíme do oboru algebry. Používali při tom však pojmy geometrické. Proto u Řeků mluvíme o tzv. geometrické algebře. [3]

Řešení rovnic algebraickými metodami tu dlouhou dobu nenacházíme. Ve 3. st. n. l. napsal řecký matematik Diofantos spis o rovnicích, který nazval Aritmetika. Jeho práce je jedním z největších děl v období starověkého Řecka. Diofantos poprvé užívá algebraickou symboliku. Zavedl symbol pro odečítání, symboly pro mocniny, symbol pro neznámou a pro její převrácenou hodnotu. Užíval pouze kladná celá čísla a zlomky. [1]

Diofantos ve své Aritmetice řeší obecně určité rovnice, lineární a kvadratické a jen v jediném speciálním případě rovnici kubickou. Při řešení kvadratických rovnic nedospěl Diofantos k formulaci obecného pravidla, ale ukazuje ho na příkladech. U druhé odmocniny používá pouze kladnou hodnotu. U jediné kubické rovnice

$$x^3 + 3x - 3x^2 - 1 = x^2 + 2x + 3,$$

která vede k rovnici

$$x^3 + x = 4x^2 + 4,$$

uvádí kořen $x = 4$. Nenaznačuje, jak tento výsledek získal. Zda vydělil obě strany rovnice dělitelem $x^2 + 1$, nebo výsledek odhadl. Diofantos řeší ve své knize také rovnice neurčité a jejich soustavy. [2] „Pokládal-li za řešení pouze kladné racionální číslo, pak je zřejmé, že se vůbec nezabýval lineárními neurčitými rovnicemi. U kvadratických, ale ani u kubických a bikvadratických[1] rovnic, pokud je řešil, nehledal bezpodmínečně celočíselné kořeny, jako to děláme dnes, když hovoříme o „diofantických rovnicích“[2].“ ([2], str. 197) Některé příklady neurčitých rovnic najdeme v Kolmanově knize. [2] Uvedeme z ní některé neurčité rovnice vyšších řádů:

1. $x^3 + y^2 = u^3$, $z^2 + y^2 = v^3$
2. $x^3 - y^3 = x - y$
3. $x^4 + y^4 + z^4 = u^2$

---

1 Algebraické rovnice 4. stupně

2 Rovnice s více neznámými (neurčité rovnice) s celočíselnými koeficienty a celočíselnými kořeny, obvykle dnes máme na mysli lineární neurčité rovnice tvaru

$$ax + by = c;\; a,\ b,\ c,\ x,\ y \in \mathbb{Z}$$

2.5 Matematika v Číně

O starověké matematice v Číně před začátkem našeho letopočtu toho příliš nevíme. Máme pouze ojedinělé zprávy z doby v polovině 2. tisíciletí př. n. l. týkající se především zkoumání kalendáře. Prvním a zároveň největším dílem období starověku je Matematika v devíti knihách (asi 2. st. př. n. l.) , ve kterém jsou shrnuty matematické znalosti do té doby známé. V Číně se užíval desítkový poziční systém, počítalo se se zlomky, poměrem, v některých příkladech nacházíme postup, který dnes nazýváme „trojčlenka“. V geometrii se řešily úlohy s užitím pravoúhlého trojúhelníku (Pythagorova věta, podobnost), počítaly obsahy a objemy různých obrazců a těles. [7]

V sedmé, osmé a deváté knize díla Matematika v devíti knihách nacházíme různé příklady na řešení lineárních rovnic a jejich soustav. Sedmá kniha obsahuje 2 metody „přebytku a nedostatku“, které jsou užity k řešení systémů dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Najdeme je v ([7], str. 34). Podrobně je zde vysvětlovat nebudeme. Kniha osmá už obsahuje obecný algoritmus řešení n lineárních rovnic o n neznámých. Koeficienty jednotlivých rovnic jsou zapsány na tabulku, kterou bychom v dnešní době nazvali maticí soustavy. Ta se pomocí úprav odpovídající postupné eliminaci neznámých dále upravuje. ([7], str. 39)

Poprvé v dějinách matematiky se v 8. knize setkáváme s rozlišováním kladných a záporných čísel. Zavedení záporných čísel a pravidel pro jejich sčítání a odčítání patřilo k největším objevům čínských matematiků. Byla zavedena proto, aby bylo možné rozšířit algoritmus řešení lineárních rovnic na libovolné úlohy z této oblasti. [7]

Mezi úlohami deváté knihy je i několik příkladů vedoucích na rovnice kvadratické. Čínští matematikové používají 2 metody řešení. Jedna z nich je ekvivalentní našemu postupu řešení úplné kvadratické rovnice. Druhou metodou je pak uplatnění algoritmu výpočtu druhé odmocniny, který se zakládá na formulích pro druhou mocninu dvojčlenu. [7]

V Matematice v devíti knihách se objevuje algoritmus pro výpočet třetí odmocniny. Jedná se vlastně o řešení binomické kubické rovnice $x^3 = a$. Nebinomické kubické rovnice s celočíselnými koeficienty se v Číně objevují později. Vyskytují se u matematika Wang Siao-tchunga, autora „Pokračování staré matematiky". [7] „V jedné z úloh mají být zjištěny strany pravoúhlého trojúhelníku, je-li znám součin odvěsen

$$xy = P = 706\frac{1}{50}$$

a rozdíl mezi přeponou a jednou z odvěsen

$$\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)} - x = Q = 36\frac{9}{10}.$$

Wang Siao-tchung vyjadřuje slovně návod na sestavení rovnice

$$x^3 + \frac{Q}{2}x^2 = \frac{P^2}{2Q}$$

a dodává, abychom provedli operaci určení kořene pomocí odmocňování, přičetli k tomu přebytek a tím dostali přeponu. Dále, abychom dělili součin první stranou, podílem potom bude strana druhá. Délky stran $x = 14\frac{7}{20}$, $y = 49\frac{1}{5}$ a $\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)} = 51\frac{1}{4}$ jsou řešením úlohy. Metoda řešení se neuvádí, ale není pochyb, že se jedná o zdokonalení staročínského postupu pro výpočet třetí odmocniny.“ ([7], str. 70)

Největšího rozkvětu dosáhla čínská algebra ve 13. století. Matematik Čchin Ťiou-šao se ve své knize „Devět knih o matematice“ věnuje podrobnému výkladu tzv. Hornerova schématu pro řešení rovnic vyšších stupňů. Li Jie ve svých knihách ([7], str. 72) rozebírá, jak vyjadřovat geometrické úlohy algebraickými rovnicemi. Ču Š‘-ťie rozpracoval symboliku pro zápis rovnic vyšších stupňů o čtyřech neznámých a řešil řadu úloh vedoucích na rovnice tohoto typu. Čínští matematikové se spokojovali s nalezením jednoho kladného kořene rovnice, na možnost existence více než jednoho řešení rovnic druhého a vyšších stupňů poukazoval až později Wu Ťing. [7]

2.6 Matematika v Indii

Nejdůležitější matematická díla v Indii byla napsána mezi 2. nebo 5. stoletím a 16. stoletím n. l., starší díla se nedochovala. Výklad je stručný a často bez důkazů. Je zde znát značný čínský vliv. Počítáno je v desítkové poziční soustavě. Indičtí matematikové řešili úlohy se zlomky, užívali druhé a třetí odmocniny, trojčlenky. [7]

Indická algebra zahrnovala nejen algebru, jak ji dnes chápeme, ale i teorii čísel, která se zvláště zabývala řešením neurčitých rovnic v oboru celých nebo racionálních čísel. Algebraická metoda se těšila značné úctě. Oddělují se v ní 2 hlavní části – algebraické výpočty a řešení rovnic prvního a druhého stupně. Užívali v ní poměrně značně rozvinutou symboliku, která vznikala zkracováním slov. V indické algebře se vyskytují záporná čísla. Nevíme, zdali jsou původní nebo přejatá z matematiky ve staré Číně, počítání s nimi je však podrobněji rozpracované. Záporná čísla byla ale pouze pomocným prostředkem pro algebraické mezivýpočty, záporná řešení rovnic většinou nebyla brána v úvahu. [7]

Indové řešili téměř výhradně rovnice prvního a druhého stupně a jejich soustavy. Brahmagupta (7. st. n. l.) podává obecné pravidlo řešení pro rovnici uvedenou na dnešní normální tvar

$$ax^2 + bx = c, \quad a > 0,$$

kde b, c by mohla být záporná čísla. Udává 2 pravidla, která můžeme vyjádřit vzorci

$$x = \frac{\sqrt{\left(4ac + b^2\right)} - b}{2a} \quad \text{a} \quad x = \frac{\sqrt{\left(ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)} - \frac{b}{2}}{a}.$$

„V řešení rovnic vyšších stupňů nedospěli indičtí matematikové k obecně platným výsledkům. Bháskara II. uvádí příklady předem vybraných rovnic třetího a čtvrtého stupně, jejichž celočíselné kořeny lze nalézt pomocí jednoduchých úprav. Tak třeba rovnici

$$x^3 - 6x^2 + 12x = 35$$

chybí na levé straně k doplnění na úplnou třetí odmocninu dvojčlenu pouze člen 8, aby platilo

$$(x-2)^3 = 27.$$

atd.“ ([7], str. 143)

2.7 Matematika arabských zemí

Matematika se v arabských zemích začala rozvíjet v 6. a 7. století n. l., kdy zde nacházeli azyl učenci okolních zemí. Později (8., 9. st.) v Bagdádu vznikla matematická škola, která aktivně pracovala téměř dvě stě let. V prvním období se arabští matematikové soustředili na překládání děl starých antických autorů a na propracování matematické terminologie, která tu předtím téměř neexistovala. Středem zájmu arabských matematiků byla komerční aritmetika, výpočty geometrických útvarů, přibližné výpočty a přibližné konstrukce, trigonometrie a numerická algebra. [6]

Největším přínosem arabské matematiky byla oblast algebry. Nejvýznamnějším matematikem, který se tímto matematickým odvětvím, zabýval byl al-Chwárizmí. K rozvoji algebry přispěl svým traktátem „Krátká kniha o počtu algebry a al-mugábaly“ napsaném v 9. století. Název operace „al-džabr“, kterou při řešení rovnic používal, dala název celé nauce o rovnicích. Ve své práci se al-Chwárizmí věnuje především řešení lineárních a kvadratických rovnic s celočíselnými koeficienty. [6]

Obecnému způsobu výpočtu odmocnin celých čísel se věnuje matematik al-Káší v díle „Klíč aritmetiky“. Kniha také obsahuje jediný nám známý výklad pravidla umocňování dvojčlenu při libovolném přirozeném exponentu. Binomické koeficienty nazývá al-Káší „prvky mocnitelů“. Uvádí zde také pravidlo postupného určení koeficientů nám známé pod vzorcem

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}.$$

Binomickou větu formuluje al-Káší pro pátou mocninu, ale při znalosti „Pascalova trojúhelníku“ platí i obecně. Poněkud se liší od tvaru, v jakém ji dnes známe:

$$(a+b)^n - a^n = \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n .$$

V 9. století se začali bagdádští matematikové věnovat ve svých pracích kubickým rovnicím. Impulz jim k tomu dala jedna úloha z Archimédovy knihy „O kouli a válci“, která řešila rozdělení koule rovinou tak, aby se poměr objemů takto vzniklých kulových úsečí rovnal danému poměru. Úlohu Archimédes řešil pomocí paraboly a posuvné rovnoosé hyperboly. Řešením geometrických úloh, které vedly na kubické rovnice, se zabývali al-Máhání, Ibn al-Hajtham, al-Kúhí, al-Bírúní a jiní matematikové, ale nejpodstatnější byla geometrická teorie kubických rovnic Omara Chajjáma (11. století). [7]

„Omar Chajjám se ve své knize „O důkazech úloh algebry a al-mugábaly“ věnoval systematickému řešení kubických rovnic. Konstatoval, že metody, kterými jsou řešeny rovnice kvadratické, v tomto případě selhávají. Kubické rovnice proto řešil geometricky pomocí kuželoseček. Nejvýznamnější přínos jeho práce představuje klasifikace kubických rovnic, geometrické konstrukce kořenů a určení počtu a podmínek existence kladných řešení. Celkem vyšetřoval 14 typů kubických rovnic, které mohou mít kladná řešení.“ ([6], str. 164)

Každou rovnici Chajjám ještě před konstrukcí kořenu uvádí na homogenní tvar, např. rovnici

$$x^3 + ax = b \tag{2.1}$$

převádí na tvar

$$x^3 + p^2x = p^2q. \tag{2.2}$$

Tato úprava se zakládá na speciálních větách elementární geometrie. Chajdám uvádí především konstrukci kořene binomické rovnice třetího stupně pomocí dvou parabol. Potom řeší buď rovnice (2.1), nebo (2.2) pomocí kružnice

$$x^2 + y^2 = qx$$

a paraboly

$$x^2 = py.$$

Podrobně se prací Omara Chajjáma, včetně rozboru několika příkladů, zabývá ve své knize Juškevič ([7], str. 256).

V arabské matematice najdeme také zárodky numerické matematiky. Těmto metodám se věnoval např. al-Káší, který řešil kubické rovnice pomocí iterací a trigonometrie.

2.8 Matematika ve středověké Evropě

V době raného středověku úroveň matematiky odrážela nepříliš utěšenou situaci celé společnosti. V podstatě až do začátku 10. století se matematický vývoj v Evropě téměř zastavil. Dříve než v jiných evropských zemích začal rozvoj řemesel a obchodu, a s nimi i matematiky, v Itálii. Matematické znalosti se zde čerpaly jednak ze zbytků řecko-římské vzdělanosti, ale také z navázaných styků s arabskou kulturou. Překládáním z arabštiny - jak původních děl, tak i řecké literatury v arabštině - se italští matematikové obzvláště zabývali ve 12. – 13. století. Díky těmto překladům se do Evropy postupně dostal – pro nás dnes velmi důležitý – desítkový poziční systém a arabské číslice. Od 11. století sehrálo důležitou roli pro rozvoj matematiky také zakládání univerzit. [7]

Nejvýznamnějším matematikem středověké Evropy byl Leonardo Pisánský, zvaný též Fibonacci. Přispěl k rozšíření poziční desítkové soustavy, shromáždil a uspořádal množství poznatků, postupů i úloh, kladl důraz na důkazy. Celé jeho dílo je obsahově velmi bohaté. Řada úloh je řešena více způsoby. Fibonacciho dílo převyšuje relativně nízkou úroveň jeho současníků i následovníků. Bylo plně pochopeno až koncem středověku. Navázali na něj v 15. a 16. století zejména Luca Paciolli a Geronimo Cardano. Mezi nejvýznamnější Fibonacciho práce můžeme zařadit Liber Abaci (r. 1202), ve kterém uvádí velké množství početních metod aritmetiky, algebry a teorie čísel a také Practica geometriae, ve kterém se zabývá praktickou a teoretickou geometrií. V roce 1225 sepsal dílo Flos, jehož hlavním tématem je diskuse o kořenu jedné kubické rovnice s celočíselnými koeficienty. [6]

Fibonacci ve svých pracích, které se zabývají algebrou, řeší lineární a kvadratické rovnice a jejich soustavy. Rozeznává 6 typů kvadratických rovnic:

$$ax^2 = bx, \quad ax^2 = c, \quad bx = c,$$

$$ax^2 + bx = c, \quad ax^2 = bx + c, \quad ax^2 + c = bx.$$

Na několika místech jeho prací se objevuje číslo nula téměř jako plnohodnotné. V příkladech je kořenem rovnice. Stejně tak se v některých příkladech vyskytují záporné kořeny, které chápe jako dluh. Ve spisu Flos se Fibonacci zabýval problémem, který můžeme vyjádřit kubickou rovnicí

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20,$$

kterou mu zadal Joannes Palermský. Fibonacci přistupuje k této úloze geometricky. Výraz x^3+2x^2+10x jako obsah obdélníku o stranách 10 a 2, který je rozdělen na 3 obdélníky. Jedna jejich strana je 10, druhá po řadě $\frac{x^3}{10}$, $\frac{x^2}{5}$, x. Ze vztahu

$$2=\frac{x^3}{10}+\frac{x^2}{5}+x$$

je zřejmé, že x není přirozené číslo. Snadno zjistíme, že x není ani racionální číslo. Pokud by x bylo iracionálním číslem, které je druhou odmocninou z čísla racionálního, byl by součet stran dvou uvažovaných obdélníků roven

$$2-\frac{x^2}{5}=x\cdot\left(\frac{x^2}{10}+1\right);$$

na levé straně této rovnice však máme veličinu racionální, zatímco na pravé straně je veličina iracionální. Fibonacci podobnými postupy prozkoumal všechny typy iracionalit z Euklidových Základů a zjistil, že kořen nemůže nabýt ani jednoho takového tvaru (proto ho ani nelze konstruovat pouze za užití kružítka a pravítka). Nakonec uvedl velmi přesnou přibližnou hodnotu kořenu:

$$1+\frac{22}{60}+\frac{7}{60^2}+\frac{42}{60^3}+\frac{33}{60^4}+\frac{4}{60^5}+\frac{40}{60^6}\doteq 1{,}368\ 808\ 107\ 853.$$

Nevíme ale, jakým způsobem ji vypočítal. Podle Cardanova vzorce (viz dále) je kořen x dán vztahem

$$x=\frac{1}{3}\cdot\left(-2+\sqrt[3]{352+\sqrt{141480}}+\sqrt[3]{352-\sqrt{141480}}\right)\doteq 1{,}368\ 808\ 107\ 821.$$

(Fibonacciho výsledek se tedy liší až v řádu 10^{-11}) ([6], str. 303)

„Důkaz, že není možné řešit kubickou rovnici kvadratickými iracionalitami byl, nehledě na svoji neúplnost a nedostatečnou obecnost, prvním krokem vpřed při vyšetřování problému řešitelnosti kubických rovnic odmocninami." ([7], str. 377) Pokusy o řešení rovnic vyšších stupňů pomocí odmocnin se objevují i nadále. Např. v díle neznámého autora se kubická rovnice

$$x^3 + px^2 + qx = r$$

řeší podle pravidla

$$x = \sqrt[3]{\left(\left(\frac{q}{p}\right)^3 + r\right)} - \frac{q}{p}.$$

Tento vzorec neplatí pro každý obecný příklad, pouze pro $p^2 = 3q$, což ve spisu není uvedeno. Proto výsledek příkladu

$$x^3 + 60x^2 + 1200x = 4000,$$

který autor řešil, je správný:

$$x = \sqrt[3]{(12000)} - 20. \tag{7}$$

Až do konce 15. století, kterým vymezujeme konec období nazývané středověk, nedošlo žádným podstatným způsobem k překonání úrovně řecké a arabské vědy. V roce 1494 vydal Luca Paciolli jednu z prvních tištěných knih, kde shrnul tehdy známé poznatky z aritmetiky, algebry a trigonometrie. Svoji knihu pak zakončil poznámkou, že řešení rovnic

$$x^3 + mx = n \text{ , } x^3 + n = mx$$

je za daného stavu matematiky nemožné právě tak jako kvadratura kruhu.

2.8.1 Cardanovy vzorce

Na Lucu Paciolliho navázali na přelomu 15. a 16. století matematikové bolognské university, kteří se snažili jít více za hranice toho, co nabízela klasická matematika do té doby. Zatímco doposud se podařilo vyřešit pouze některé speciální případy kubických rovnic, bologňští matematikové se pokusili nalézt řešení obecné. Tři typy kubických rovnic

$$x^3 + px = q, \quad x^3 = px + q, \quad x^3 + q = px,$$

kde p a q jsou kladná čísla, podrobně zkoumal Scipio Del Ferro. Své výsledky však neuveřejnil, ačkoliv prý dosáhl řešení. Taktéž Niccolo Fontana, zvaný též Tartaglia, řešil tyto typy úloh. Ani on nepublikoval své výsledky, ale sdělil je na žádost Cardanovi. [1]

Geronimo Cardano vydal v roce 1545 knihu o algebře Ars Magna, ve které vyložil Fontanovy metody řešení kubických rovnic a přidal k nim vlastní důkazy. Řešení, které si podrobněji vyložíme v další kapitole, dnes označujeme jako Cardanovy vzorce. Pro případ

$$x^3 + px = q$$

má řešení tvar

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}}.$$

Toto řešení zavádí veličiny tvaru $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}}$, které jsou odlišné od euklidovských iracionalit $\sqrt{a + \sqrt{b}}$. Cardano připouštěl jako řešení záporná čísla, takovým kořenům říkal fiktivní. V případě řešení rovnice typu

$$x^3 + q = px,$$

která má 3 různé reálné kořeny, však Cardano naráží na potřebu spočítat $\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$, kde $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$. Tento případ nazývá casus irreducibilis a není schopen ho rozřešit. [1]

Problém ireducibilního případu vyřešil až o několik let déle Raffael Bombelli. V knize Algebra z roku 1572 zavádí teorii ryze imaginárních čísel. Číslo 3i píše, vyjádřeno v naší symbolice, jako $\sqrt{0-9}$. Na příkladu ukázal, že platí

$$\sqrt[3]{52 + \sqrt{0-2209}} = 4 + \sqrt{0-1}.$$

V knize Ars Magna nalezneme také metodu řešení obecné bikvadratické rovnice, kterou objevil Cardanův žák Ludovico Ferrari. Metoda spočívá v převedení této rovnice na rovnici kubickou. Například rovnici

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$$

Ferrari převedl na tvar

$$y^3 + 15y^2 + 36y = 450. \quad [1]$$

3 Řešení kubických rovnic

V této kapitole se budeme věnovat samotnému řešení kubických rovnic. Ukážeme si, jak řešit obecnou kubickou rovnici algebraicky pomocí odmocnin, goniometrické řešení kubických rovnic a řešení některých speciálních případů (reciproké rovnice 3. stupně, binomické rovnice 3. stupně).

3.1 Souvislost mezi kořeny a koeficienty

Souvislost mezi kořeny a koeficienty algebraické rovnice je spjata se jménem François Viète (1540–1603). Pro kvadratickou rovnici

$$x^2 + px + q = 0$$

s kořeny x_1, x_2 Viète formuloval vztahy

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 x_2 = q,$$

pro kubickou rovnici

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

s kořeny x_1, x_2, x_3

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p, \quad x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = q, \quad x_1 x_2 x_3 = -r.$$

Viète tyto vztahy uvádí ve své práci De emendatione aequationum pro rovnice druhého až pátého stupně.

Poznámka: Pro kvadratickou rovnici byly tyto vztahy známé italským matematikům již v první polovině 16. století. Cardano znal také vztah kořenů kubické rovnice a koeficientu u druhé mocniny neznámé. [20]

Věta 3.1 *(vlastnosti kořenů):* Pro kořeny α_1, α_2, α_3, ..., α_n rovnice

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

platí

$$a_1 = (-1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = (-1)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i,$$

$$a_2 = (-1)^2 (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n) = (-1)^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \alpha_i\alpha_j,$$

$$a_3 = (-1)^3 (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n) = (-1)^3 \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} \alpha_i\alpha_j\alpha_k,$$

...

$$a_n = (-1)^n \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n.$$

Bez důkazu.

Poznámka: znaménko $\sum$ má naznačit, že součet se vztahuje vždy na všechny kombinace indexů α_1, α_2, α_3, ..., α_n, a to vždy takového typu, jaký je uveden za součtovým znaménkem.

Výše uvedené vzorce jsou zajímavé tím, že nám cosi říkají o kořenech rovnice, aniž bychom tuto rovnici řešili. V některých případech toho můžeme při řešení rovnic využít.

Příklad 1:

Řešte rovnici

$$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0,$$

pokud víte, že jeden její kořen je dvojnásobkem jiného.

Kořeny napíšeme ve tvaru α_1, $2\alpha_1$, α_3. Platí

$$\alpha_1 + 2\alpha_1 + \alpha_3 = 8, \quad \alpha_1 \cdot 2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_3 = 17,$$

tedy

$$3\alpha_1 + \alpha_3 = 8, \quad 2\alpha_1^2 + 3\alpha_1\alpha_3 = 17.$$

Pokud z rovnice $\alpha_3 = 8 - 3\alpha_1$ dosadíme do $2\alpha_1^2 + 3\alpha_1\alpha_3 = 17$, dostaneme kvadratickou rovnici

$$7\alpha_1^2 - 24\alpha_1 + 17 = 0.$$

Řešením je buď $\alpha_1 = \dfrac{34}{14}$, nebo $\alpha_1 = 1$. Pro α_3 dostaneme buď $\alpha_3 = \dfrac{10}{14}$ nebo $\alpha_3 = 5$. Dosazením se přesvědčíme, že řešením dané rovnice jsou čísla $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 5$.

3.2 Algebraické řešení kubické rovnice

Vyřešit obecnou kubickou rovnici algebraicky, tedy pomocí čtyř základních matematických operací (sčítání, odčítání, násobení a dělení) a pomocí odmocnin, se v historickém pohledu matematikům dlouho nedařilo. Jak již bylo uvedeno, úspěšný pokus byl proveden až na počátku 16. století. Ve své knize Ars Magna podal výklad metody řešení kubických rovnic Geronimo Cardano. Přes jisté spory o prvenství nalezení této metody řešení jsou nám dnes výrazy, pomocí kterých vypočítáme kořeny kubické rovnice, známy jako Cardanovy vzorce. Postup, který vedl ke zjištění, že každou algebraickou rovnici třetího stupně lze řešit algebraicky, zde podrobně popíšeme. Omezíme se při tom, v celém dalším textu, na řešení kubických rovnic s reálnými koeficienty, jež se v praxi vyskytují nejčastěji.

Předpokládejme, že daná kubická rovnice je uvedena v normovaném tvaru

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0. \tag{3.1}$$

Zavedeme novou neznámou y pomocí substituce

$$x = y - \frac{a_1}{3}. \tag{3.2}$$

Tím odstraníme kvadratický člen a dostaneme redukovanou rovnici ve tvaru

$$y^3 + py + q = 0, \tag{3.3}$$

kde $p = -\frac{a_1{}^2}{3} + a_2$, $q = \frac{2a_1^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_3$. Pokud $p = 0$, přejde úloha v řešení binomické rovnice třetího stupně. Předpokládejme proto, že $p \neq 0$. Zavedeme pomocné veličiny u, v a pokusíme se vyjádřit kořen rovnice (3.3) ve tvaru $y = u + v$. Po dosazení do rovnice (3.3) dostaneme postupně

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0,$$

$$u^3 + v^3 + (u+v)(p+3uv) + q = 0. \tag{3.4}$$

Stanovíme podmínku pro čísla u a v tak, abychom ve vztahu (3.4) závorku $(p+3uv)$ anulovali:

$$p + 3uv = 0,$$

$$uv = -\frac{p}{3}. \tag{3.5}$$

Rovnice (3.4) se tak redukuje na tvar

$$u^3 + v^3 = -q. \tag{3.6}$$

Pokud umocníme podmínku (3.5) na třetí, dostaneme

$$u^3 \cdot v^3 = \frac{p^3}{27}. \tag{3.7}$$

Na vztahy (3.6) a (3.7) můžeme nahlížet jako na Viètovy vzorce pro kořeny u^3, v^3 kvadratické rovnice

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{3.8}$$

Rovnici (3.8) nazýváme kvadratickou rezolventou kubické rovnice. Přistupme k vyjádření kořenů u^3, v^3 kvadratické rezolventy:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \tag{3.9}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \tag{3.10}$$

Zápornou hodnotu z výrazu pod odmocninou $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ nazveme diskriminantem kubické rovnice. Budeme ho značit $D_3 = -\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$.

Vztahy (3.9) a (3.10) představují dvě binomické rovnice třetího stupně pro neznámé u, v. Existují právě tři komplexní čísla u_1, u_2, u_3 a tři komplexní čísla v_1, v_2, v_3, která vyhovují daným binomickým rovnicím. Máme tedy zdánlivě 9 kořenů pro neznámou y. Vzhledem k neekvivalentní úpravě, kdy jsme rovnici (3.5) umocnili na třetí, však nejsou všechna tato čísla kořeny rovnice (3.3). Jsou to pouze ta, která vyhovují podmínce (3.5). Každé ze tří hodnot u tedy odpovídá vždy jen jediná hodnota v, a to $v = -\frac{p}{3u}$.

Vyjádřeme nyní kořeny rovnice (3.3). Pokud čísla ε_1, ε_2 jsou komplexně sdružené kořeny rovnice

$$x^3 - 1 = 0,$$

tedy primitivní třetí odmocniny z jedné tvaru

$$\varepsilon_1 = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \ \varepsilon_2 = \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2},$$

pak kořeny y_1, y_2, y_3 rovnice (3.3) můžeme zapsat takto:

$$\begin{aligned} y_1 &= u+v, \\ y_2 &= \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v, \\ y_3 &= \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Po dosazení za u a v dostaneme

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \\ y_2 &= \varepsilon_1\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \varepsilon_2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \\ y_3 &= \varepsilon_2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \varepsilon_1\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Vzorce (3.12) pro kořeny kubické rovnice (3.3) se nazývají Cardanovy vzorce.

Příklad 2:

Řešte kubickou rovnici

$$x^3 - 9x^2 + 36x - 28 = 0. \tag{3.13}$$

Pro odstranění kvadratického členu rovnice zavedeme substituci $x = y+3$. Rovnice přejde na tvar

$$y^3 + 9y + 26 = 0. \tag{3.14}$$

Vyjádříme u a v:

$$u = \sqrt[3]{-13+\sqrt{13^2+3^3}} = \sqrt[3]{-13+\sqrt{196}} = \sqrt[3]{-13+14} = \sqrt[3]{1}.$$

Pokud zvolíme za $\sqrt[3]{1}$ přímo číslo 1, dostaneme pro $v = -\frac{p}{3u} = -\frac{9}{3} = -3$.

Pro kořeny rovnice (3.14) dostaneme:

$$y_1 = 1 - 3 = -2,$$
$$y_2 = \varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 = 1 + 2\mathrm{i}\sqrt{3},$$
$$y_3 = \varepsilon_2 - 3\varepsilon_1 = 1 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Pro kořeny rovnice (3.13) po dosazení do substituce pak máme:

$$x_1 = 1,$$
$$x_2 = 4 + 2\mathrm{i}\sqrt{3},$$
$$x_3 = 4 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

3.2.1 Diskuze řešení kubické rovnice

Podle hodnoty diskriminantu $D_3 = -\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$ kubické rovnice (3.3) rozlišujeme celkem 3 možnosti, jak mohou kořeny této rovnice vypadat.

1. Je-li její diskriminant $D_3 < 0$, pak má tato rovnice jeden kořen reálný a dva imaginární komplexně sdružené.
2. Je-li její diskriminant $D_3 > 0$, pak má tato rovnice 3 kořeny reálné od sebe různé.
3. Je-li její diskriminant $D_3 = 0$, pak má tato rovnice jeden kořen dvojnásobný nebo trojnásobný. V obou případech jsou to opět kořeny pouze reálné.

3.2.2 Casus irreducibilis kubické rovnice

Význam Cardanových vzorců ukážeme na příkladu.

Příklad 3:

Řešte pomocí Cardanových vzorců rovnice

$$x^3 + x - 10 = 0, \tag{3.15}$$

$$x^3 - 10x + 12 = 0. \tag{3.16}$$

Diskriminant rovnice (3.15) $D_3 = -\left(25 + \frac{1}{27}\right) = -\frac{26}{9}\sqrt{3}$ je záporný, proto má rovnice jeden kořen reálný a dva komplexně sdružené. Dosazením zjistíme, že reálný kořen je $x_1 = 2$. Po vydělení polynomů $\left(x^3 + x - 10\right) : (x - 2) = x^2 + 2x + 5$ jsou další kořeny rovnice (3.15) řešením rovnice $x^2 + 2x + 5 = 0$, tedy $x_2 = -1 + 2i$, $x_3 = -1 - 2i$. Pokud dosadíme do vzorců (3.12), dostáváme tyto kořeny:

$$x_1 = \sqrt[3]{5 + \frac{26}{9}\sqrt{3}} + \sqrt[3]{5 - \frac{26}{9}\sqrt{3}},$$

$$x_2 = \varepsilon_1 \sqrt[3]{5 + \frac{26}{9}\sqrt{3}} + \varepsilon_2 \sqrt[3]{5 - \frac{26}{9}\sqrt{3}},$$

$$x_3 = \varepsilon_2 \sqrt[3]{5 + \frac{26}{9}\sqrt{3}} + \varepsilon_1 \sqrt[3]{5 - \frac{26}{9}\sqrt{3}}.$$

Ani dobrý matematik není schopen na první pohled poznat, že kořen x_1 z Cardanových vzorců je roven číslu 2.

Podívejme se na rovnici (3.16). Diskriminant $D_3 = -\left(36 - \frac{1000}{27}\right) = \frac{28}{27}$ je kladný, proto má rovnice tři kořeny reálné. Dosazením zjistíme, že první kořen je $x_1 = 2$. Po vydělení polynomů $\left(x^3 - 10x + 12\right) : (x - 2) = x^2 + 2x - 6$ jsou další kořeny rovnice (3.16) řešením rovnice $x^2 + 2x - 6 = 0$, tedy $x_2 = -1 + \sqrt{7}$, $x_3 = -1 - \sqrt{7}$. Pokud dosadíme do vzorců (3.12), dostáváme tyto kořeny:

$$x_1 = \sqrt[3]{-6 + i\sqrt{\frac{28}{27}}} + \sqrt[3]{-6 - i\sqrt{\frac{28}{27}}},$$

$$x_2 = \varepsilon_1 \sqrt[3]{-6 + i\sqrt{\frac{28}{27}}} + \varepsilon_2 \sqrt[3]{-6 - i\sqrt{\frac{28}{27}}},$$

$$x_3 = \varepsilon_2 \sqrt[3]{-6 + i\sqrt{\frac{28}{27}}} + \varepsilon_1 \sqrt[3]{-6 - i\sqrt{\frac{28}{27}}}.$$

Cardanovy vzorce dávají tedy reálné kořeny rovnice (3.16) ve formě imaginární. Vidíme proto, že praktický význam Cardanových vzorců pro číselný výpočet kořenů je velmi malý. Pro určité případy, kdy $D_3 < 0$, by mohly být tyto vzorce užitečné, pokud je ale $D_3 > 0$, Cardanovy vzorce nemůžeme použít vůbec. Lze totiž dokázat, že v tomto případě nelze reálné kořeny vyjádřit pomocí reálných odmocnin. Důkaz je uveden například v knize Š. Schwarze (viz [12], str. 379). Případ, kdy $D_3 > 0$, byl nazván casus irreducibilis kubické rovnice.

3.3 Goniometrické řešení kubické rovnice

V předchozím článku jsme viděli, že řešení kubických rovnic pomocí Cardanových vzorců může být někdy dosti problematické. Zvláště v případech, kdy je diskriminant kubické rovnice kladný, je použití těchto vzorců v praxi zcela nevhodné. Ukážeme zde proto způsob, jak lze jednoduše tento problém vyřešit vyjádřením komplexních čísel v goniometrickém tvaru. Takové řešení kubické rovnice můžeme nazvat řešením goniometrickým.

Mějme kubickou rovnici tvaru $x^3+px+q=0$. Pokud $D_3=-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)>0$, potom je zřejmě $p<0$. Vyjádříme číslo u^3 z Cardanova vzorce v goniometrickém tvaru výrazem

$$u^3=-\frac{q}{2}+\mathrm{i}\sqrt{D_3}=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi),$$

kde $r>0,\ 0<\varphi<\pi$. Odtud plyne:

$$r=\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3},$$

$$\cos\varphi=-\frac{q}{2r}=-\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}},$$

$$\sin\varphi=\frac{\sqrt{D_3}}{r}.$$

Podobně můžeme vyjádřit číslo v^3:

$$v^3=-\frac{q}{2}-\mathrm{i}\sqrt{D_3}=r(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi).$$

Podle věty 1.6 můžeme všechny hodnoty čísel u resp. v vyjádřit ve tvaru:

$$\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right),\quad k=0,\ 1,\ 2,$$

resp.

$$\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right),\quad k=0,\ 1,\ 2.$$

Stačí vzít u obou sčítanců ve vztahu $x=u+v$ to určité k, aby byla splněna podmínka (3.5). Imaginární části se zruší a pro kořeny $x_1,\ x_2,\ x_3$ dostaneme:

$$x_1 = 2 \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\frac{\varphi}{3},$$
$$x_2 = 2 \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\frac{\varphi + 2\pi}{3},$$
$$x_3 = 2 \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\frac{\varphi + 4\pi}{3}.$$

Obdobným způsobem, jakým jsme našli goniometrické řešení pro případ, kdy je diskriminant kubické rovnice kladný, bychom mohli hledat goniometrické řešení i v případě záporného diskriminantu. Takové řešení je o něco složitější a nebudeme se jím dále zabývat. Lze jej najít podrobně vyložené například v knize [10].

Příklad 4:

Řešte goniometricky rovnici 3.16.

Diskriminant $D_3 = -\left(36 - \frac{1000}{27}\right) = \frac{28}{27}$ je kladný, proto má rovnice tři kořeny reálné. Vypočteme nejdříve úhel φ, pro který platí vztah

$$\cos\varphi = -\frac{12}{2 \cdot \sqrt{\frac{1000}{27}}} \doteq -0,985900603.$$

Vyjde

$$\varphi \doteq 2,973469759.$$

Dopočítáme hodnoty kořenů:

$$x_1 \doteq 2 \cdot \sqrt{\frac{10}{3}} \cdot \cos 0,991156586 \doteq 2,$$
$$x_2 \doteq 2 \cdot \sqrt{\frac{10}{3}} \cdot \cos 3,085551689 \doteq -3,651483717 \doteq -1 - \sqrt{7},$$
$$x_3 \doteq 2 \cdot \sqrt{\frac{10}{3}} \cdot \cos 5,179946791 \doteq 1,645751309 \doteq -1 + \sqrt{7}.$$

Poznámka: Úhel φ je vyjádřen v obloukové míře. Při porovnání s příkladem č. 3 zjistíme, že hodnoty kořenů se shodují.

3.4 Řešení binomických rovnic 3. stupně

Binomickou rovnici 3. stupně můžeme řešit dvěma způsoby. Algebraicky a goniometricky. Ukážeme nyní oba způsoby řešení. Diskriminant D_3 je záporný, rovnice má tedy vždy jeden reálný a dva komplexně sdružené kořeny.

Algebraické řešení

Mějme binomickou rovnici 3. stupně v normovaném tvaru

$$x^3 - a = 0, \tag{3.17}$$

kde a je reálné číslo. Upravme tuto rovnici na tvar

$$x^3 - \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \left(x - \sqrt[3]{a}\right)\left(x^2 + \sqrt[3]{a}x + \sqrt[3]{a^2}\right).$$

Pak řešením rovnice (4.17) jsou kořeny rovnic

$$\left(x + \sqrt[3]{a}\right) = 0, \quad x^2 - \sqrt[3]{a}x + \sqrt[3]{a^2} = 0.$$

Příklad 5:

Řešte rovnici

$$x^3 + 64 = 0.$$

Rovnici upravíme na tvar $(x+4)\left(x^2 - 4x + 16\right) = 0$. Řešením rovnic

$$x + 4 = 0,\ x^2 - 4x + 16 = 0$$

získáme kořeny původní rovnice $x_1 = -4,\ x_2 = 2 + 2i\sqrt{3},\ x_3 = 2 - 2i\sqrt{3}$.

Goniometrické řešení

Ke goniometrickému řešení binomické rovnice 3. stupně tvaru (3.17) využijeme větu 1.6.

Po dosazení do

$$x_{k+1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0,\ 1,\ \ldots, n-1,$$

pro $n = 3$ dostaneme

$$x_1 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right),$$

$$x_2 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right),$$

$$x_3 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 4\pi}{3}\right).$$

Příklad 6:

Řešte rovnici

$$x^3 + 64 = 0.$$

Je $-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$, kořeny rovnice jsou

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{64}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right),\ k = 0,\ 1,\ 2.$$

a tedy

$$x_1 = \sqrt[3]{64}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2 + 2i\sqrt{3},$$

$$x_2 = \sqrt[3]{64}\left(\cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}\right) = -4,$$

$$x_3 = \sqrt[3]{64}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2 - 2i\sqrt{3}.$$

3.5 Řešení reciprokých rovnic 3. stupně

Kladně reciproká rovnice

Mějme rovnici

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad a_0 \neq 0. \tag{3.18}$$

která vyhovuje definici kladně reciproké rovnice. Z první kapitoly víme, že má tato rovnice kořen $x_1 = -1$. Rovnici proto můžeme napsat v součinovém tvaru

$$(x+1)\left[a_0x^2 + (a_1 - a_0)x + a_0\right].$$

Kořeny x_2, x_3 rovnice (3.18) získáme jako řešení kvadratické rovnice

$$a_0x^2 + (a_1 - a_0)x + a_0 = 0,$$

zřejmě tedy

$$x_2 = \frac{a_0 - a_1 + \sqrt{(a_1 - a_0)^2 - 4a_0^{\,2}}}{2a_0},$$

$$x_3 = \frac{a_0 - a_1 - \sqrt{(a_1 - a_0)^2 - 4a_0^{\,2}}}{2a_0}.$$

Záporně reciproká rovnice

Mějme rovnici

$$a_0x^3 + a_1x^2 - a_1x - a_0 = 0, \quad a_0 \neq 0, \tag{3.19}$$

která vyhovuje definici záporně reciproké rovnice. Z první kapitoly víme, že má tato rovnice kořen $x_1 = 1$. Dále řešíme obdobně jako kladně reciprokou rovnici.

Příklad 7:

Řešte rovnici

$$2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0.$$

Rovnice má kořen $x_1 = -1$. Dále upravíme na tvar

$$(x+1)\left(2x^2+5x+2\right)=0$$

a řešíme kvadratickou rovnici $2x^2+5x+2=0$. $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -2$.

4 Přibližné metody řešení kubických rovnic

V předcházející kapitole jsme ukázali, jakým způsobem můžeme řešit kubické rovnice algebraicky. Takové řešení má vysokou teoretickou cenu. Pro praktické využití je ovšem algebraické řešení nevhodné, neboť často vede k velmi složitým vyjádřením, která neumíme zjednodušit. Proto budeme hledat metody řešení v praxi lépe použitelné, ale vystačíme si s hodnotami přibližnými. Rovnice totiž může popisovat nějaký fyzikální děj, kde její koeficienty jsou čísla získaná měřením a tedy ne zcela přesná. Přesný výpočet kořenů potom nemá smysl. Při hledání řešení rovnice se omezíme zásadně jen na reálné kořeny.

Numerickým řešením rovnice nazýváme přibližný výpočet jejích kořenů s předem udanou přesností. Je založeno na iteračních principech. Popíšeme nyní některé numerické metody řešení algebraických rovnic a poté vyzkoušíme tyto metody na rovnicích 3. stupně.

Numerické řešení rovnic má tři části:

1. ohraničení kořenů – tj. nalezení intervalu, ve kterém leží všechny reálné kořeny
2. separace kořenů – tj. nalezení intervalů, ve kterých se vyskytuje vždy právě jeden reálný kořen rovnice
3. aproximace kořenů – tj. postupné zužování intervalu, ve kterém je separovaný kořen, tak dlouho, až najdeme hodnotu kořene s předem udanou přesností

Při užití numerických metod budeme chtít také odpovědět na dvě otázky:

1. Konvergují dané iterace?
2. Jestliže ano, jak rychle?

Pokud nemáme žádné informace o poloze kořenů, užijeme k výpočtu iterační metody, jejíž konvergence nezávisí na zvolené počáteční aproximaci. Taková metoda však bývá obvykle pomalá. Po získání dobré aproximace můžeme přejít k rychleji konvergující metodě.

Hornerův algoritmus

Při hledání řešení algebraických rovnic pomocí numerických metod se nám často stane, že budeme potřebovat zjistit funkční hodnotu polynomu nebo jeho derivací v nějakém bodě, jestli má rovnice vícenásobné kořeny, vydělit polynom polynomem apod. Všechny tyto úkony si výrazně zjednodušíme, pokud použijeme postup, který nazýváme Hornerův algoritmus. Tento postup si stručně popíšeme.

Věta 4.1: Nechť je dán mnohočlen

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \quad a_0 \neq 0, \tag{4.1}$$

n-tého stupně s reálnými koeficienty a_k, $\mathrm{k} = 0, 1, \ldots, n.$ Pak pro každé číslo α a polynom $P(x)$ n-tého stupně $(n \geq 1)$ platí

$$P(x) = (x - \alpha) Q(x) + r_n, \tag{4.2}$$

kde polynom

$$Q(x) = r_0 x^{n-1} + r_1 x^{n-2} + \ldots + r_{n-1} \tag{4.3}$$

je stupně $n-1$ a koeficienty r_i lze získat rekurentním předpisem

$$r_0 = a_0, \quad r_i = a_i + r_{i-1}\alpha, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.4}$$

Důkaz:

Roznásobíme a seřadíme podle mocnin x pravou stranu v (4.2). Máme tvar:

$$r_0 x^n + (r_1 - r_0\alpha)x^{n-1} + (r_2 - r_1\alpha)x^{n-2} + \ldots + (r_{n-1} - r_{n-2}\alpha)x + (r_n - r_{n-1}\alpha).$$

Po porovnání s mnohočlenem (4.1) dostaneme

$$r_0 = a_0, \quad r_i - r_{i-1}\alpha = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

odkud ihned plynou vztahy (4.4). □

Polynom Q je neúplným podílem polynomu P při dělení dvojčlenem $x-\alpha$ a konstantu r_n nazýváme zbytkem. Pokud v (4.2) položíme $x=\alpha$, pak $P(\alpha)=r_n$. Proto lze vztahy (4.4) určit koeficienty podílu Q i funkční hodnotu $P(\alpha)$.

Vztahy (4.4) definují Hornerův algoritmus. Při ručním počítání postup zmechanizujeme následovně: Sestavíme schéma se třemi řádky a do prvního řádku napíšeme všechny (tedy i nulové) koeficienty daného polynomu a hodnotu α zapíšeme vlevo do druhého řádku. Zbytek druhého řádku necháme předběžně prázdný. Do třetího řádku napíšeme nejprve koeficient r_0 $(r_0 = a_0)$, pak postupně vypočteme součin $r_0\alpha$, součet $r_1 = a_1 + r_0\alpha$, …, až $r_n = a_n + r_{n-1}\alpha = P(\alpha)$. Hornerovo schéma vypadá takto (postup je znázorněn šipkami):

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
\alpha & & r_0\alpha & r_1\alpha & \cdots & r_{n-2}\alpha & r_{n-1}\alpha \\
 & \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow & & \downarrow \nearrow & \downarrow \\
\hline
 & r_0 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{n-1} & r_n = P(\alpha)
\end{array}$$

Příklad 8:

Určete funkční hodnotu polynomu $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 12x + 7$ pro $x = 3$.

Hornerovým algoritmem dostaneme

	3	–4	–12	7
3		9	15	9
	3	5	3	$16 = P(3)$.

Věta 4.2: Pro derivaci polynomu (4.1) v bodě $x = \alpha$ platí $P'(\alpha) = Q(\alpha)$, kde $Q(x)$ je podíl při dělení polynomu $P(x)$ dvojčlenem $x - \alpha$.

Důkaz: viz [16], str. 85.

Příklad 9:

Určete hodnotu derivace polynomu $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 12x + 7$ pro $x = 4$.

Použitím Hornerova algoritmu dvakrát po sobě dostaneme

	3	–4	–12	7
4		12	32	80
	3	8	20	$87 = P(4)$.
4		12	80	
	3	20	$100 = P'(2)$	

4.1 Význam grafu

Z předchozího textu víme, že algebraická rovnice n-tého stupně má vždy přesně n kořenů (s ohledem na jejich násobnost). Nevíme však, jestli jsou tyto kořeny reálné či komplexní, neznáme jejich polohu v Gaussově rovině. Velmi názornou metodou k přibližnému získání reálných kořenů algebraické rovnice je užití grafu. Abychom však mohli zjistit polohu kořenů z grafu, musíme znát alespoň přibližně interval, v němž všechny tyto reálné kořeny algebraické (v našem případě kubické) rovnice leží. Tento interval se naučíme hledat v následujícím článku 4.2.

Algebraickou úlohu, tedy řešení kubické rovnice (1.2), transformujeme na úlohu geometrickou tak, že připojíme proměnnou $y \in \mathbb{R}$ a vytvoříme funkce $f: \ y = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$, $g: \ y = 0$. Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic a zakreslíme grafy funkcí f, g jako kubickou parabolu a přímku (osu x). x-ové souřadnice bodů, které jsou průnikem grafů funkcí f, g, jsou pak námi hledané hodnoty kořenů kubické rovnice. Přesnost hodnot těchto kořenů plně závisí na tom, jak přesné jsou zakreslené grafy.

Podle hodnoty diskriminantu D_3 rozlišíme opět 3 případy. Pokud je diskriminant D_3 záporný, průnikem grafů funkcí f, g je jediný bod – reálný kořen kubické rovnice (dva kořeny jsou komplexně sdružené). V případě, že je diskriminant D_3 roven nule, jsou průnikem buď jeden (jeden trojnásobný reálný kořen), nebo dva (jeden dvojnásobný a jeden jednoduchý reálný kořen) body. Násobný kořen z grafů poznáme tak, že se grafy f, g „neprotínají“, nýbrž jen „dotýkají“. Pokud je diskriminant D_3 kladný, jsou průnikem tři body – tři různé reálné kořeny. Vyřešme nyní ukázkový příklad.

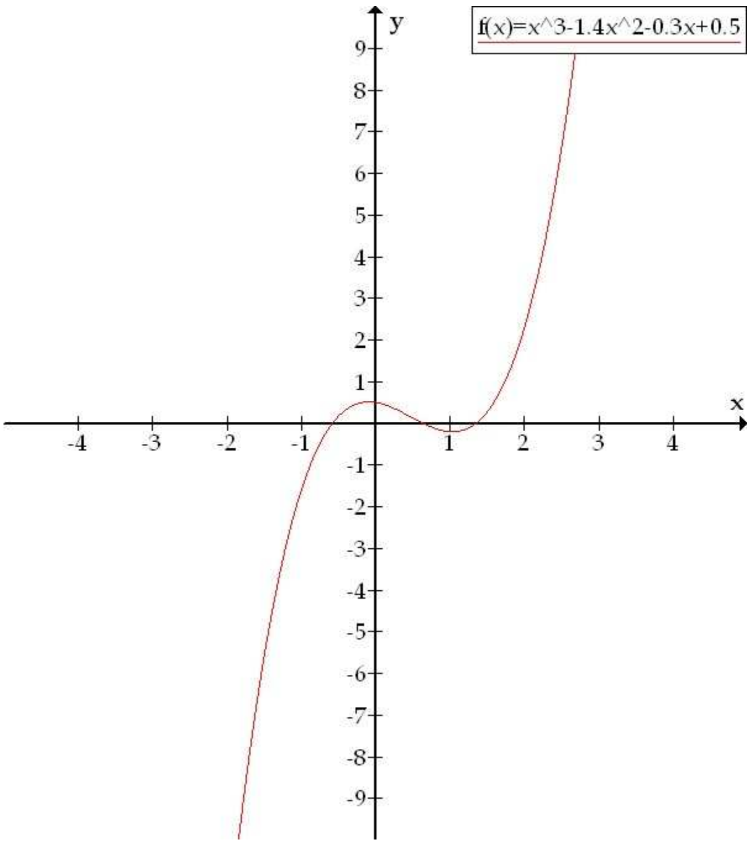
Příklad 10:

Zjistěte přibližnou polohu reálných kořenů rovnice

$$x^3 - 1,4x^2 - 0,3x + 0,5 = 0\,.$$

Sestrojíme graf levé strany rovnice, tj. funkce $f(x) = x^3 - 1,4x^2 - 0,3x + 0,5$ například v intervalu $\langle -4,\ 4\rangle$.

Graf funkce je zakreslen na obr. 1. V našem případě protíná osu x třikrát. Rovnice má tedy 3 různé reálné kořeny $x_1,\, x_2,\, x_3$, které odpovídají hodnotám x-ových souřadnic průsečíků funkce $f(x)$ a osy x. Z grafu vidíme, že kořeny $x_1,\, x_2,\, x_3$ leží v intervalech $\langle -1,\ 0\rangle$, $\langle 0,\ 1\rangle$, $\langle 1,\ 2\rangle$. Přibližné hodnoty kořenů určíme odhadem: $x_1 = -0,6$; $x_2 = 0,7$; $x_3 = 1,4$ (přesnější hodnoty – na 3 platná desetinná místa – jsou tyto: $x_1 \doteq -0,584$, $x_2 \doteq 0,637$, $x_3 \doteq 1,347$).



Obr. 1

Vidíme, že hodnoty kořenů zjištěné z grafu jsou poměrně přesné. Někdy ovšem potřebujeme hodnoty s přesností mnohem větší. V takovém případě už budeme nuceni zvolit některou z numerických metod (viz dále). Přesto je použití grafu velmi užitečné. Hodnoty, které z něho dostaneme, můžeme dobře použít při dalším zpřesňování.

4.2 Meze reálných kořenů

Vrátíme se ještě jednou k intervalu $\langle -4,\ 4\rangle$, ve kterém jsme řešili příklad 9. V tomto intervalu leží všechny 3 reálné kořeny rovnice. Tato skutečnost je ale dána tím, že daný interval byl vhodně zvolen. Pokud bychom volili například interval $\langle -4,\ -1\rangle$, v grafu bychom žádné kořeny nenašli, což by mohlo vést k nesprávnému závěru. Je tedy velmi důležité zvolit takový interval, ve kterém najdeme všechny reálné kořeny rovnice. K tomu nám dobře poslouží odhad polohy reálných kořenů na číselné ose.

Horní hranicí reálných kořenů algebraické rovnice je každé reálné číslo r takové, že pro každý reálný kořen α platí $\alpha \le r$. Analogicky dolní hranicí reálných kořenů je každé reálné číslo s takové, že pro každý reálný kořen α platí $\alpha \ge s$. Tedy všechny reálné kořeny leží v intervalu $\langle s,\ r\rangle$. Uveďme zde některé odhady polohy reálných kořenů algebraických rovnic.

Věta 4.3: Nechť je dána normovaná algebraická rovnice

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (4.5)$$

s reálnými koeficienty. Všechny reálné kořeny této rovnice leží v intervalu $\langle -A-1,\ A+1\rangle$, kde

$$A=\max\left(|a_1|,\ \ldots,|a_n|\right).$$

Bez důkazu.

Věta 4.4: Nechť

$$f\left(x\right)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0,\quad a_0>0 \tag{4.6}$$

je algebraická rovnice, kde alespoň jeden z koeficientů a_k, $k=1,\ \ldots,n$, je záporný. Pak pro každý reálný kořen α rovnice (4.6) platí

$$\alpha\le 1+\frac{|a_i|}{a_0}\quad (\textit{Maclaurinův odhad}),$$

$$\alpha\le 1+\sqrt[r]{\frac{|a_i|}{a_0}}\quad (\textit{Lagrangeův odhad}),$$

$$\alpha\le 1+\sqrt[r-s]{\frac{|a_i|}{a_s}}\quad (\textit{Tillotův odhad}),$$

kde a_i je v absolutní hodnotě největší záporný koeficient v (4.6) (pokud žádný takový není, pak $\alpha\le 0$), a_r je první záporný koeficient v (4.6) a a_s je největší z prvních r kladných koeficientů v (4.6).

Bez důkazu.

Věta 4.5: *(Cauchyho odhad)* Nechť rovnice (4.5) má m záporných koeficientů (a_i, a_j, a_k, …, a_l). Horní hranicí reálných kořenů rovnice (4.5) je pak největší z čísel

$$\sqrt[i]{m|a_i|},\ \sqrt[j]{m|a_j|},\ \sqrt[k]{m|a_k|},\ \ldots,\ \sqrt[l]{m|a_l|}.$$

Bez důkazu.

Věta 4.6: *(Newtonův odhad)* Nechť $f(x)=0$ je algebraická rovnice, kde

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\,. \tag{4.7}$$

Nechť také $c>0$ je číslo, pro které $f(c)>0$, a všechna čísla $f'(c), f''(c), \ldots, f^{(n-1)}(c)$ jsou nezáporná. Potom každý reálný kořen rovnice (4.7) je menší nebo roven číslu c.

Bez důkazu.

Věta 4.7: Nechť $f(x)=0$ je algebraická rovnice, kde

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \quad a_0\neq 0\,.$$

Má-li tato rovnice kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, pak má rovnice

$$g(x)\equiv(-1)^n f(-x)\equiv a_0x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}-\ldots+(-1)^n a_n=0$$

kořeny $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n$.

Bez důkazu.

Poznámka: S výjimkou věty 4.3 se všechny ostatní odhady zabývaly určením horní hranice reálných kořenů dané rovnice. Analogické odhady polohy reálných kořenů zdola dostaneme aplikací věty 4.7.

Příklad 11:

Určete horní i dolní hranici reálných kořenů rovnice $3x^3+2x^2+9x-6=0$ pomocí výše uvedených odhadů.

Rovnici převedeme na normovaný tvar

$$x^3+\frac{2}{3}x^2+3x-2=0$$

a) Odhad podle věty 4.3:

$$A = \max\left(\left|\frac{2}{3}\right|,\ |3|,\ |-2|\right) = 3,$$ takže podle odhadu $\langle -A-1,\ A+1\rangle$

leží všechny reálné kořeny zaručeně v intervalu $\langle -4,\ 4\rangle$.

b) Maclaurinův odhad:

Horní hranice: $1+\frac{|a_i|}{a_0} = 1+\frac{|-2|}{1} = 3$,

Dolní hranice: určíme rovnici $g(x) \equiv x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 3x + 2 = 0$, pak

$1+\frac{|a_i|}{a_0} = 1+\frac{\left|-\frac{2}{3}\right|}{1} = \frac{5}{3}$. Protože číslo $\frac{5}{3}$ je horní hranicí reálných kořenů rovnice $g(x) = 0$, je číslo $-\frac{5}{3}$ dolní hranicí reálných kořenů rovnice $f(x) = 0$. Reálné kořeny leží v intervalu $\left\langle -\frac{5}{3},\ 3\right\rangle$.

c) Lagrangeův odhad:

Horní hranice: $1+\sqrt[r]{\frac{|a_i|}{a_0}} = 1+\sqrt[3]{\frac{|-2|}{1}} \doteq 1+\sqrt[3]{2} \doteq 2{,}26$,

Dolní hranice: z funkce $g(x)$ dostaneme $1+\sqrt[r]{\frac{|a_i|}{a_0}} = 1+\sqrt[1]{\frac{\left|-\frac{2}{3}\right|}{1}} = \frac{5}{3}$

Reálné kořeny leží v intervalu $\left\langle -\frac{5}{3},\ 1+\sqrt[3]{2}\right\rangle$.

d) Tillotův odhad:

Horní hranice: $1+\sqrt[r-s]{\frac{|a_i|}{a_s}} = 1+\sqrt[3-2]{\frac{|-2|}{3}} = 1+\frac{|-2|}{3} = \frac{5}{3}$,

Dolní hranice: z funkce $g(x)$ dostaneme

$$1+\sqrt[r-s]{\frac{|a_i|}{a_s}}=1+\sqrt[1-0]{\frac{\left|-\frac{2}{3}\right|}{1}}=1+\frac{\left|-\frac{2}{3}\right|}{1}=\frac{5}{3},$$

Reálné kořeny leží v intervalu $\left\langle -\frac{5}{3},\ \frac{5}{3}\right\rangle$.

e) Cauchyho odhad:

Horní hranice: $\sqrt[i]{m|a_i|}=\sqrt[3]{1|-2|}=\sqrt[3]{2}\doteq 1,26,$

Dolní hranice: $\sqrt[i]{m|a_i|}=\sqrt[1]{1\left|-\frac{2}{3}\right|}=\frac{2}{3},$

Reálné kořeny leží v intervalu $\left\langle -\frac{2}{3},\ \sqrt[3]{2}\right\rangle$.

f) Newtonův odhad:

Horní hranice (postupným derivováním mnohočlenu):

$$f(x)=x^3+\frac{2}{3}x^2+3x-2$$

Dostáváme:

$$f'(x)=3x^2+\frac{4}{3}x+3,$$

$$f''(x)=6x+\frac{4}{3}.$$

Zvolme nejprve např. $c=0,5$. Dosazením dostaneme $f''(0,5)>0$, $f'(0,5)>0$, ale $f(0,5)<0$. Zvolíme tedy větší číslo, např. $c=1$. Dosazením dostaneme $f''(1)>0$, $f'(1)>0$, $f(1)>0$. Vidíme, že pro $c=1$ je splněna podmínka a tedy číslo 1 můžeme považovat za horní hranici reálných kořenů dané rovnice.

Dolní hranice (postupným derivováním mnohočlenu):

$$g(x)=x^3-\frac{2}{3}x^2+3x+2$$

Dostáváme:

$$g'(x) = 3x^2 - \frac{4}{3}x + 3$$

$$g''(x) = 6x - \frac{4}{3}$$

Zvolme opět $c = 0,5$. Dosazením dostaneme $g''(0,5) > 0$, $g'(0,5) > 0$ a $g(0,5) > 0$. Číslo $0,5$ vyhovuje. Reálné kořeny dané rovnice leží v intervalu $\langle -0,5,\ 1 \rangle$. Tímto postupem jsme tedy došli k nejpřesnějšímu odhadu.

Dodejme, že rovnice $3x^3 + 2x^2 + 9x - 6 = 0$ má jeden reálný kořen $x_1 \doteq 0,546$.

4.3 Počet reálných kořenů v daném intervalu

V této části si uvedeme některé věty a postupy, které nám pomůžou najít intervaly, ve kterých leží právě jeden reálný kořen dané rovnice. Velmi důležitá je tzv. věta Bolzanova-Weierstrassova.

Věta 4.8 *(Bolzanova-Weierstrassova):* Je-li $f(x)$ mnohočlen, jsou-li a a b dvě různá reálná čísla a mají-li čísla $f(a)$ a $f(b)$ různá znaménka, leží mezi a a b lichý počet reálných kořenů rovnice $f(x) = 0$. Mají-li čísla $f(a)$ a $f(b)$ stejná znaménka, leží mezi a a b sudý počet kořenů nebo neleží mezi nimi kořen žádný.

Věta je velmi názorná, pokud si vytvoříme graf. Musíme si ovšem uvědomit, že každý kořen počítáme s ohledem na jeho násobnost. Z věty vyplývá několik vlastností algebraických rovnic.

Důsledek 1: Každá rovnice lichého stupně (tedy i kubická) má alespoň jeden reálný kořen.

Důsledek 2: Algebraická rovnice lichého stupně má vždy lichý počet reálných kořenů, algebraická rovnice sudého stupně má sudý počet reálných kořenů nebo nemá žádný reálný kořen.

Podle uvedené věty a důsledků, které z ní vyplývají, můžeme přibližně určit reálné kořeny nebo alespoň velmi zúžit interval, ve kterém leží. Budeme předpokládat, že reálné kořeny leží v intervalu $\langle x,\, y \rangle$. Zvolíme body

$$z_1 = x,\; z_2,\; z_3,\; \ldots,\; z_{k-1},\; z_k = y$$

a vypočítáme funkční hodnoty v těchto bodech

$$f(z_1), f(z_2), f(z_3), \ldots, f(z_{k-1}), f(z_k).$$

Pokud má hodnota $f(z_{i+1})$ opačné znaménko než $f(z_i)$, leží v intervalu $\langle z_i,\, z_{i+1} \rangle$ reálný kořen rovnice $f(x)=0$. Pokud zvolíme dostatečné množství čísel z_i, můžeme určit hodnotu kořenů s předem danou přesností. Tento postup je podstatou metody půlení intervalu (viz. článek 4.4).

Mějme algebraickou rovnici

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{4.8}$$

a posloupnost jejích koeficientů $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Vynecháme ty, které jsou rovny nule. Řekneme, že mezi dvěma za sebou jdoucími členy této posloupnosti je znaménková změna, pokud mají opačná znaménka. Počet znaménkových změn souvisí s počtem kladných kořenů rovnice (4.8). Tuto souvislost vyjadřuje následující věta.

Věta 4.9 *(Descartova):* Počet kladných kořenů rovnice (4.8) je roven nejvýše počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Pokud je menší, liší se počet kladných kořenů a počet znaménkových změn o sudé číslo.
Bez důkazu.

Poznámka: Descartova věta je dosti obecná a dá nám pouze rychlý odhad počtu kladných a záporných (při využití věty 4.7) kořenů. Vlastní separaci kořenů provedeme pouze několikanásobným použitím této věty při vhodných úpravách dané algebraické rovnice. Tento postup ilustruje příklad v ([12], str. 169).

Věta 5.10 *(Budanova-Fourierova):* Mějme reálný mnohočlen $f(x)$, kde $a_0 > 0$. Nechť $p < q, f(p) \cdot f(q) \neq 0$. Označme $w(x)$ počet znaménkových změn v posloupnosti

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x).$$

Pak počet reálných kořenů rovnice (5.6) v intervalu $\langle p,\ q \rangle$ je buď roven $w(p) - w(q)$, nebo je o sudý počet menší.
Bez důkazu.

Příklad 12:

Zjistěte přibližnou polohu reálných kořenů rovnice $f(x) \equiv 3x^3 - x^2 - 16x + 10 = 0$ pomocí Budanovy-Fourierovy věty.

Postupným derivováním dostáváme:

$$f'(x) = 9x^2 - 2x - 16,$$

$$f''(x) = 18x - 2,$$

$$f'''(x) = 18$$

Sestavíme tabulku 1:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$
−3	−32	71	−56	18
−2	14	24	−38	18
−1	22	−5	−20	18
0	10	−16	−2	18
1	−4	−9	16	18
2	−2	16	34	18
3	34	59	52	18

Tab. 1

Protože potřebujeme pouze znaménka, sestavíme podobnou tabulku 2 se znaménky, která bude přehlednější.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	Z. z.	Rozdíl
−3	−	+	−	+	3	
−2	+	+	−	+	2	1
−1	+	−	−	+	2	0
0	+	−	−	+	2	0
1	−	−	+	+	1	1
2	−	+	+	+	1	0
3	+	+	+	+	0	1

Tab. 2

Počet znaménkových změn posloupnosti $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ pro $x \in \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ je v tabulce 3 ve sloupci označeném „Z. z.“. V posledním sloupci je pak rozdíl znaménkových změn této posloupnosti na příslušném intervalu. Podle věty Budanovy-Fourierovy má daná rovnice $f(x) \equiv 3x^3 - x^2 - 16x + 10 = 0$ po jednom reálném kořenu v intervalech $\langle -3,\ -2 \rangle$, $\langle 0,\ 1 \rangle$, $\langle 2,\ 3 \rangle$. Přibližné hodnoty kořenů rovnice na 3 platná desetinná místa jsou $x_1 \doteq -2{,}428$; $x_2 \doteq 0{,}650$; $x_3 \doteq 2{,}112$. Je zřejmé, že leží skutečně v intervalech určených pomocí věty Budanovy-Fourierovy. V tomto konkrétním příkladu nám užití této věty dalo přesné počty reálných kořenů.

Věta 4.11 *(Sturmova):* Nechť rovnice (4.6) má pouze jednoduché kořeny. Nechť $p < q, f(p) \cdot f(q) \neq 0$, pak v intervalu $\langle p,\ q \rangle$ je právě $V(p) - V(q)$ kořenů rovnice (4.6), kde $V(x)$ je počet znaménkových změn v tzv. Sturmově posloupnosti

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_m(x);$$

lze např. volit posloupnost

$$f(x),\ f'(x),\ r_1(x),\ \ldots,\ r_s(x),$$

kde $-r_1(x)$ je zbytek při dělení $f(x) : f'(x)$, $-r_2(x)$ je zbytek při dělení $f'(x) : r_1(x)$ atd., až $-r_s(x)$ je zbytek při dělení $r_{s-2}(x) : r_{s-1}(x)$ a přitom $r_s(x)$ je již konstanta různá od nuly.

Bez důkazu.

Příklad 13:

V intervalu $\langle 0,\ 4 \rangle$ zjistěte počet reálných kořenů rovnice

$$f(x) \equiv x^3 - 2x^2 - 6x + 8 = 0,$$

víte-li, že rovnice nemá žádné vícenásobné kořeny.

Postupným dělením vypočítáme členy Sturmovy posloupnosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - 6x + 8 \\ f'(x) &= 3x^2 - 4x - 6 \\ r_1(x) &= 11x - 15 \\ r_2(x) &= 1 \end{aligned}$$

Každý z členů $r_1(x)$ a $r_2(x)$ jsme vynásobili vhodnou kladnou konstantou. Dosáhli jsme tak toho, že jsou koeficienty celá čísla.

Sestavíme tabulku 3:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$r_1(x)$	$r_2(x)$	Z. z.	Rozdíl
0	−	+	−	+	2	
4	+	+	−	+	0	2

Tab. 3

Protože $V(0) = 2$ a $V(4) = 0$, odtud $V(0) - V(2) = 2$, má uvedená rovnice v intervalu $\langle 0,\ 4 \rangle$ dva reálné kořeny (přibližné hodnoty kořenů: $x_1 \doteq 1{,}146$; $x_2 \doteq 3{,}103$; $x_3 \doteq -2{,}249$. Vidíme, že dva leží skutečně v intervalu $\langle 0,\ 4 \rangle$).

Uvedli jsme si některé metody, kterými jsme zjišťovali počet reálných kořenů algebraické (v našem případě kubické) rovnice v daném intervalu $\langle p,\ q \rangle$. Zatímco Descartova a Budanova-Fourierova věta nás informovaly o počtu reálných kořenů dané rovnice pouze přibližně, Sturmova věta udává tento počet přesně (i když je dosti pracná). Postupným dělením intervalu $\langle p,\ q \rangle$ a aplikací vhodné věty o separaci kořenů najdeme podinterval intervalu $\langle p, q\rangle$, obsahující přesně po jednom kořenu dané rovnice.

4.4 Metoda půlení intervalu

Předpokládejme, že f je spojitá funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí $f(a)f(b)<0$. Tyto předpoklady zaručují existenci alespoň jednoho kořene rovnice $f(x)=0$ v intervalu $\langle a, b\rangle$. Sestrojíme posloupnost intervalů

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k \supset \ldots,\ I_k = \langle a, b\rangle.$$

Je-li $f(a_{k-1})f(b_{k-1})<0$, potom $I_k = \langle a_k, b_k\rangle$ bude ten z intervalů $\langle a_{k-1}, s_k\rangle$, $\langle s_k, b_{k-1}\rangle$, v jehož koncových bodech má funkce f opačná znaménka. Pro s_k (střed intervalu I_{k-1}) platí

$$s_k = \frac{1}{2}(a_{k-1}+b_{k-1}).$$

Není-li po konečném počtu kroků nalezen kořen, pak posloupnosti $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ mají společnou limitu, která je kořenem rovnice $f(x)=0$. Pro odhad chyby po n krocích dostaneme

$$|a_n-\alpha| \le \frac{b_0-a_0}{2^n};\ |b_n-\alpha| \le \frac{b_0-a_0}{2^n}. \qquad (4.9)$$

Pomocí těchto vztahů můžeme předem určit počet kroků potřebných k dosažení požadované přesnosti.

Příklad 14:

Metodou půlení intervalu určete kořen rovnice

$$f(x) \equiv 2x^3 + 4x^2 - 14x - 11 = 0 \quad (4.10)$$

v intervalu $\langle -2,\ 0\rangle$. Volte $\varepsilon = 0{,}0005$.

Funkce $f(x)$ je spojitá pro všechna x, $f(-2) > 0$, $f(0) < 0$. Rovnice má tedy v intervalu $\langle -2,\ 0\rangle$ aspoň 1 řešení. Zjistíme si nejprve počet kroků, které budeme k výpočtu potřebovat. Mají platit vztahy (4.9). Pro $n = 12$ dostaneme $|a_{12} - \alpha| < \frac{2}{2^{12}} < 0{,}0005$; (stejně tak pro $|b_{12} - \alpha|$). $s_0 = -1$. Protože $f(-2) > 0$, $f(-1) > 0$ a $f(0) < 0$, leží kořen rovnice v intervalu $\langle a_1,\ b_1\rangle = \langle -1,\ 0\rangle$. Uvedený postup budeme opakovat celkem dvanáctkrát, až získáme řešení s požadovanou přesností. Výpočet je uveden v tabulce 4.

n	a_n	b_n
0	−2	0
1	−1	0
2	−1	−0,5
3	−0,75	−0,5
4	−0,75	−0,625
5	−0,75	−0,6875
6	−0,71875	−0,6875
7	−0,703125	−0,6875
8	−0,703125	−0,6953125
9	−0,69921875	−0,6953125
10	−0,697265625	−0,6953125
11	−0,6962890625	−0,6953125
12	−0,69580078125	−0,6953125

Tab. 4

Platí $-0{,}6958 < \alpha < -0{,}6953$.

Výhodou metody půlení intervalu je její jednoduchost a možnost předem určit počet kroků. Nevýhodou je pomalá konvergence a fakt, že pokud leží v intervalu $\langle a,\ b\rangle$ více kořenů, určíme tímto postupem jen jeden.

4.5 Metoda prosté iterace

Mezi oblíbené metody přibližného řešení rovnic patří tzv. metoda prosté iterace. Spočívá v nahrazení původní rovnice $f(x)=0$ rovnicí $x=\varphi(x)$ a aplikací metody postupných aproximací. Funkce φ se nazývá iterační.

Věta 4.12: Nechť je funkce φ definována v intervalu $(-\infty,\ +\infty)$ a nechť existuje číslo $a\in\langle 0,\ 1)$ takové, že je splněna tzv. Lipschitzova podmínka

$$|\varphi(v)-\varphi(u)|\le a|v-u| \tag{4.11}$$

$\forall u,\ v\in(-\infty,\ +\infty)$. Pak rovnice $x=\varphi(x)$ má v intervalu $(-\infty,\ +\infty)$ právě jeden kořen α. Iterační posloupnost $\{x_n\}$ definovaná předpisem

$$x_{i+1}=\varphi(x_i),\quad i=0,1,\ \ldots, \tag{4.12}$$

je pro každé x_0 konvergentní a její limitou je α. Platí odhad

$$|\alpha-x_n|\le\frac{a}{1-a}|x_n-x_{n-1}|. \tag{4.13}$$

Důkaz: viz [16], str. 93.

Poznámka: Jestliže výpočet zastavíme podmínkou $|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon$ potom pro odhad chyby máme

$$\left|\alpha - x_n\right| \le \frac{a}{1-a}\varepsilon.$$

Věta 4.13: Nechť $I = \langle y-r,\ y+r \rangle$ je uzavřený interval se středem y a nechť existuje číslo $a \in \langle 0,\ 1)$ takové, že pro všechna $u,\ v \in I$ platí vztah (4.11) a také

$$\left|y - \varphi(y)\right| \le (1-a)\,r. \tag{4.14}$$

Pak rovnice $x = \varphi(x)$ má v intervalu I právě jeden kořen α. Iterační posloupnost $\{x_n\}$ definovaná předpisem (4.12) je pro každé $x_0 \in I$ konvergentní a její limitou je α.
Bez důkazu.

Příklad 15:

Metodou prosté iterace určete kořen rovnice (4.10) v intervalu $\langle -2,\ 0 \rangle$. $\varepsilon = 0{,}0005$.

Přepíšeme rovnici (4.10) na tvar

$$x = \frac{1}{14}\left(2x^3 + 4x^2 - 11\right) \equiv \varphi(x)$$

a určíme derivaci $\varphi'(x)$:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{14}\left(6x^2 + 8x\right).$$

Pro $x \in \langle -2,\ 0 \rangle$ platí nerovnost $\left|\varphi'(x)\right| \le \frac{8}{14} = a < 1$. Pro střed intervalu $y = -1$ a poloměr $r = 1$ dostaneme $\left|y - \varphi(y)\right| = \frac{5}{14} < (1-a)\,r = \frac{6}{14}$. Jsou tedy splněny předpoklady věty 4.13 a kořen $\alpha \in \langle -2,\ 0 \rangle$ určíme iterační metodou při volbě počáteční hodnoty $x_0 \in \langle -2,\ 0\rangle$. V tabulce 5 je uveden výpočet pro případ $x_0 = -2$.

n	x_n
0	−2
1	−0,785714286
2	−0,678623490
3	−0,698780955
4	−0,694945925
5	−0,695674906
6	−0,695536309
7	−0,695562659
8	−0,695557649
9	−0,695558602
10	−0,695558421
11	−0,695558455
12	−0,695558448

Tab. 5

Pro odhad chyby použijeme vzorec $|\alpha - x_n| \le \dfrac{a}{1-a}|x_n - x_{n-1}|$. Pokud zvolíme $n = 6$, pak $|\alpha - x_6| \le \dfrac{\frac{8}{14}}{1-\frac{8}{14}}|x_6 - x_5| \doteq 0{,}000185 < \varepsilon$. Číslo x_6 splňuje požadovanou přesnost, což je patrné už při pohledu na tabulku.

4.6 Metoda tětiv (regula falsi)

Metoda tětiv je jednou z iteračních metod. Mějme opět rovnici $f(x) = 0$. Předpokládejme, že funkce f je spojitá v intervalu $\langle a,\ b\rangle$ a rovnice $f(x) = 0$ má v tomto intervalu jeden reálný kořen α (tj.

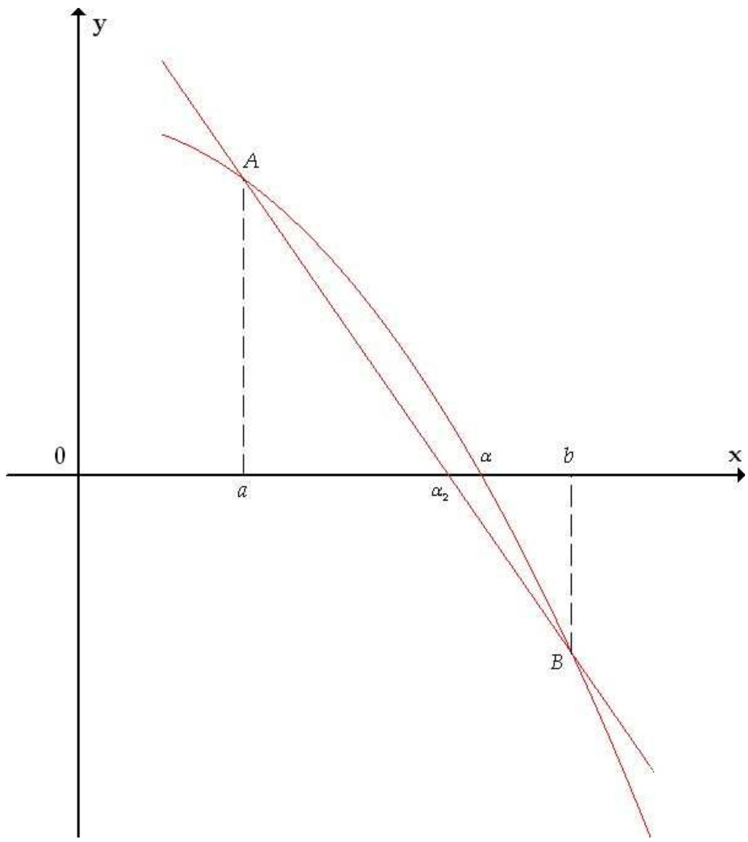
$f(a)f(b)<0$). Jeho přibližnou hodnotu dostaneme tak, že nahradíme v grafu oblouk křivky funkce f mezi body $A=[a, f(a)]$ a $B=[b, f(b)]$ úsečkou (tětivou, viz obr. 2). Tato tětiva je grafem lineární funkce

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

Osu x protíná v bodě se souřadnicemi $[\alpha_2,\ 0]$, kde

$$\alpha_2=\frac{f(a)b-f(b)a}{f(a)-f(b)} \tag{4.15}$$

je vnitřní bod intervalu $\langle a,\ b\rangle$.



Obr. 2

Pokud aproximace α_2 kořene α není dostatečně přesná, opakujeme postup. Vypočteme $f(\alpha_2)$. Pokud $f(a)f(\alpha_2)<0$, leží kořen v intervalu $\langle a,\ \alpha_2\rangle$, v opačném případě leží kořen v intervalu $\langle \alpha_2,\ b\rangle$ a můžeme v jednom z těchto intervalů hledat další aproximaci α_3 kořene α. Jestliže pojmenujeme bod a jako α_1 a bod b jako α_0 ($A=\left[\alpha_1,\ f(\alpha_1)\right]$, $B=\left[\alpha_0,\ f(\alpha_0)\right]$), můžeme posloupnost $\{\alpha_n\}$ vyjádřit rekurentně takto:

$$\alpha_{n+1}=\frac{\alpha_0 f(\alpha_n)-\alpha_n f(\alpha_0)}{f(\alpha_n)-f(\alpha_0)}=\alpha_n-\frac{f(\alpha_n)}{f(\alpha_n)-f(\alpha_0)}(\alpha_n-\alpha_0) \tag{4.16}$$

Algoritmus metody tětiv odpovídá algoritmu metody prosté iterace pro funkci

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f(x)-f(x_0)}(x-x_0).$$

Odvodíme si zde vzorec pro odhad chyby, který můžeme použít u každé iterační metody neboť na zvolené metodě nezávisí. Využijeme k tomu větu o střední hodnotě.

Věta 4.14 *(o střední hodnotě):* Nechť $f(x)$ je libovolný polynom a $\langle a,\ b\rangle$ libovolný uzavřený interval. Potom uvnitř intervalu $(a,\ b)$ leží aspoň jeden bod ξ, pro který platí

$$f(b)-f(a)=(b-a)\cdot f'(\xi),\quad \text{tj. } f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{4.17}$$

Důkaz: viz [12], str. 153.

Nechť $\{\alpha_n\}$ je posloupnost, která konverguje k číslu α. Použijeme větu o střední hodnotě na interval $\langle \alpha_n,\ \alpha \rangle$ nebo $\langle \alpha,\ \alpha_n \rangle$, podle toho, zda je $\alpha_n < \alpha$ či $\alpha_n > \alpha$. Pokud $f(\alpha) = 0$, dostaneme

$$|\alpha - \alpha_n| = \frac{|f(\alpha_n)|}{|f'(\xi)|}.$$

Jestli v $\langle a,\ b \rangle$ je $|f'(x)| \geq m > 0$, pak

$$|\alpha - \alpha_n| \leq \frac{|f(\alpha_n)|}{m}, \tag{4.18}$$

což je náš hledaný vzorec.

Příklad 16:

Metodou tětiv určete kořen rovnice (4.10) v intervalu $\langle -2,\ 0 \rangle$. $\varepsilon = 0,0005$.

Vypočteme nejprve čísla $f(-2) = 17$ a $f(0) = -11$. Protože jejich znaménka jsou opačná, můžeme použít metodu regula falsi. Označíme $\alpha_1 = -2,\ \alpha_0 = 0$. Dosazením do vzorce (4.16) dostaneme přibližnou hodnotu α_2:

$$\alpha_2 = -2 - \frac{f(-2)}{f(-2) - f(0)}(-2-0) = -2 - \frac{17 \cdot (-2)}{17+11} \doteq -0,785714286$$

Podobně postupujeme i dále. V tabulce 6 jsou uvedeny výsledky.

n	$f(\alpha_n)$	α_n
0	−11	0
1	17	−2
2	1,499271141	−0,785714286
3	−0,454836967	−0,668265388
4	0,000736968	−0,695602681
5	0,000000140	−0,695558458
6	−0,000000009	−0,695558449
7		−0,695558449

Tab. 6

Jak je vidět z tabulky 6, požadovanou přesnost splňuje už aproximace kořenu $\alpha_4 \doteq -0{,}6956$. Hodnotu α_6 už máme určenu s přesností na 9 platných desetinných míst.

Výhodou metody tětiv je fakt, že vždy konverguje, je jednoduchá a neklade větší nároky na separaci kořenů. Nevýhodou je, že určí vždy pouze jeden kořen a je celkem pomalá. Může být ale efektivnější než metoda půlení intervalu.

4.7 Metoda tečen (Newtonova metoda)

V tomto článku budeme předpokládat, že rovnice $f(x)=0$ má pouze jednoduché kořeny a funkce $f(x)$ je spojitá v nějakém intervalu $\langle a,\, b\rangle$ a má v tomto intervalu též spojitou první a druhou derivaci.

Poznámka: vzhledem k tomu, že vyšetřujeme kořeny algebraické rovnice a $f(x)$ je polynom, je druhý z předpokladů (spojitost $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$) zaručen.

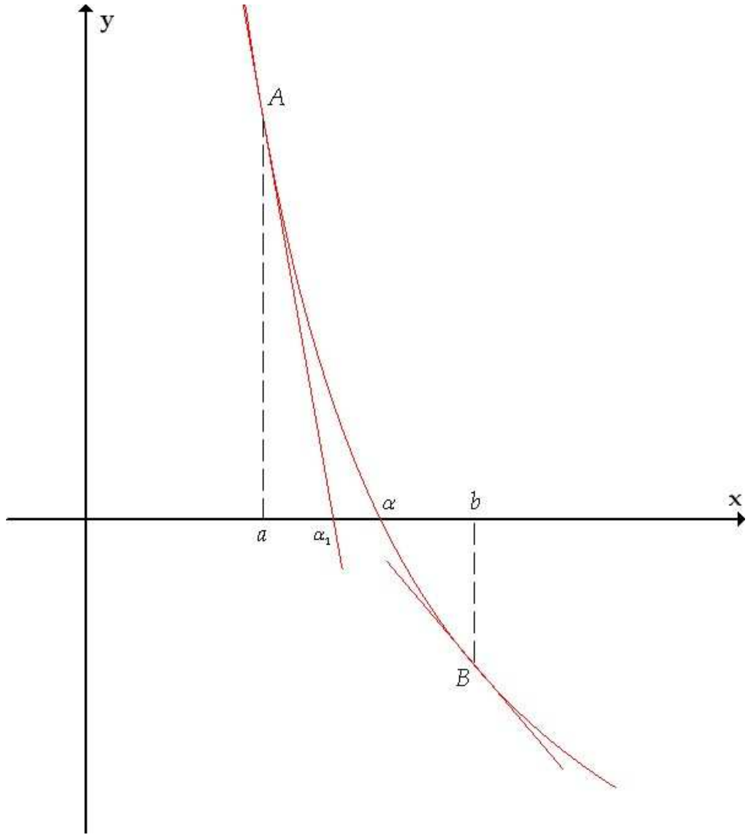
Stejně jako v případě předchozí metody, začneme jednoduchou geometrickou interpretací. Narozdíl od metody regula falsi, kde jsme nahradili graf funkce f v blízkosti kořene tětivou, nahradíme tento graf tečnou. Pokud zvolíme v grafu na oblouku křivky funkce f bod $A=[a, f(a)]$ a existuje derivace $f'(a)$, existuje v bodě A tečna ke křivce daná rovnicí

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

Průsečík α_1 této tečny grafu funkce f s osou x má souřadnice

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad y = 0,$$

a je lepší aproximací kořenu α než a (viz obr. 3).



Obr. 3

Věta 4.15: Nechť α je kořenem rovnice $f(x)=0$. Nechť funkce f má v nějakém okolí U bodu α spojitou první a druhou derivaci, přičemž pro $x \in U$ je $f'(x) \neq 0$. Pak existuje interval $I = \langle \alpha - r,\ \alpha + r \rangle \subseteq U$ takový, že platí:

1. Je-li $x_0 \in I$ a $\{x_n\}$ iterační posloupnost definovaná vztahem

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots, \tag{4.19}$$

pak posloupnost $\{x_n\}$ je konvergentní a její limitou je kořen α.

2. Označíme-li

$$m = \min_{x \in I} |f'(x)|, \quad M = \max_{x \in I} |f''(x)|,$$

platí tyto odhady absolutní chyby aproximace x_{n+1}:

$$|\alpha - x_{n+1}| \le \frac{M}{2m}(\alpha - x_n)^2, \tag{4.20}$$

$$|\alpha - x_{n+1}| \le \frac{M}{2m}(x_{n+1} - x_n)^2. \tag{4.21}$$

Důkaz: viz [16], str. 97.

Věta 4.15 nám zaručuje konvergenci iterační posloupnosti v případě, že výchozí aproximace x_0 je zvolena dostatečně blízko kořenu α. Užitečná je i následující věta jejíž charakter je spíše globální.

Věta 4.16: Nechť má funkce f následující vlastnosti:

1. Funkce f je definovaná a spojitá v intervalu

$$\langle a,\, b\rangle,\ f(a)f(b) < 0;$$

2. Existují spojité derivace f', f'' v $\langle a,\, b\rangle$ a nemění tam svá znaménka.

Nechť x_0 je ten z krajních bodů intervalu $\langle a,\, b\rangle$, pro který

$$f(x_0)f''(x_0) > 0. \tag{4.22}$$

Pak iterační posloupnost $\{x_n\}$ definovaná vztahem (4.19) je konvergentní a její limitou je jediné řešení rovnice $f(x) = 0$ v intervalu $\langle a,\, b\rangle$.

Důkaz:

Vyšetříme případ $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ (v ostatních 3 případech je důkaz obdobný). Protože f je funkce spojitá, rostoucí a konvexní v intervalu $\langle a,\, b\rangle$, platí $f(a)<0,\, f(b)>0.$ Odtud má f v $\langle a,\, b\rangle$ právě jeden kořen.

Důkaz provedeme matematickou indukcí. Zvolme podle předpokladu $x_0 = b$. Pro kořen α platí $\alpha < x_0$. Nyní dokažme, že platí

$$\alpha < \ldots < x_{n+1} < x_n < \ldots < x_0. \tag{4.23}$$

Předpokládejme, že $\alpha < x_n \le x_0$. Protože f je rostoucí, je $f(x_n) > 0.$ Podle (4.19) je $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, kde $f(x_n)>0,\;\; f'(x_n)>0.$ Proto musí platit $x_{n+1} < x_n$. Ukážeme ještě, že $\alpha < x_{n+1}$. Podle Taylorova vzorce můžeme napsat

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}(x - x_n)^2 f''(\xi),$$

kde $\xi \in (x,\, x_n)$. Protože $f''(x) > 0$ v intervalu $\langle a,\, b\rangle$, platí pro každé $x \in \langle a,\, b\rangle$, $x \ne x_n$, nerovnost

$$f(x) > f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

Na obou stranách nerovnosti jsou rostoucí funkce v $\langle a,\, b\rangle$, proto $\alpha < x_{n+1}$, kde α je kořen rovnice $f(x) = 0$ a x_{n+1} je kořen rovnice $f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$. Tímto jsme dokázali vztah (4.23).

Nyní za předpokladu, že platí vztah (4.23) můžeme stejným způsobem ukázat, že $\alpha < \ldots < x_{n+2} < x_{n+1} < \ldots < x_0$.

Posloupnost $\{x_n\}$ je monotónní a omezená, je tedy konvergentní. Pokud $\bar{\alpha} = \lim x_n$, je $\alpha \le \bar{\alpha}$. Dosadíme do vztahu (4.19) a dostaneme $\bar{\alpha} = \bar{\alpha} - \dfrac{f(\bar{\alpha})}{f'(\bar{\alpha})}$, neboli $f(\bar{\alpha}) = 0.$ Zřejmě $\bar{\alpha} = \alpha$. □

Příklad 17:

Najděte kořen rovnice (4.10) v intervalu $\langle -2,\ 0\rangle$, tentokrát metodou tečen. $\varepsilon = 0{,}0005$.

Zvolíme tentokrát za počáteční bod $x_0 = 0$ (při volbě $x_0 = -2$ by posloupnost $\{x_n\}$ nebyla konvergentní). Vypočítáme hodnoty $f(0)$, $f'(0)$, a dosadíme do vzorce (4.19). Pro x_1 dostaneme:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{-11}{-14} \doteq -0{,}785714285$$

Další výpočty jsou uvedeny v tabulce 7.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	0	−11	−14
1	−0,785714286	1,499271137	−16,58163265
2	−0,695296703	−0,004361139	−16,66174859
3	−0,695558449	−0,0000000118	−16,66165826
4	−0,695558449		

Tab. 7

Je zřejmé, že požadovanou přesnost získáme již při druhé iteraci. Při třetí iteraci již máme kořen s přesností na devět desetinných míst.

Výhodou metody tečen je rychlá konvergence ke kořenu rovnice. Nevýhodou pak, že uvažujeme pouze jednoduché kořeny. V případě vícenásobných kořenů je $f'(\alpha) = 0$, což je v rozporu s předpokladem věty 4.15.

4.8 Rychlost konvergence iteračních metod

Důležitá vlastnost iteračních metod je rychlost s jakou konvergují ke kořenu rovnice. Řekneme, že iterační funkce φ je r-tého řádu v bodě α, pokud platí

$$\varphi(\alpha)=\alpha,\ \varphi'(\alpha)=\varphi''(\alpha)=\ldots=\varphi^{(r-1)}(\alpha)=0,\quad \varphi^{(r)}(\alpha)\neq 0.$$

V praxi se nejčastěji užívá iteračních metod prvního a druhého řádu. Metody vyšších řádů konvergují velmi rychle, jsou však příliš složité. Lze ukázat, že metoda prosté iterace a metoda tětiv jsou metody prvního řádu, metoda tečen řádu druhého.

Vraťme se k příkladům 14, 15, 16 a 17, kde jsme hledali přibližné řešení stejné kubické rovnice různými metodami. Je zřejmé, že metoda půlení intervalu konvergovala ke kořenu rovnice nejpomaleji a každá následující metoda byla v tomto lepší. Metody půlení intervalu a regula falsi jsou vždy konvergentní metody, u metody prosté iterace a Newtonovy metody jsme museli ověřit předem, zda konvergují. Rychlost konvergence numerických metod je důležitým atributem při řešení rovnic. Nicméně neméně důležitým se zdá být i pracnost výpočtu.

5 Grafické řešení kubických rovnic

V článku 4.1 jsme ukázali, jak nám může graf funkce pomoci při hledání přibližného řešení kubické rovnice. Nyní na tento článek navážeme a vysvětlíme metody, pomocí kterých lze řešit kubické rovnice pouze ze znalosti grafů funkcí, které se v nich vyskytují.

Řešení, při kterém jsme zakreslili do kartézské soustavy souřadnic graf funkce f a hledali řešení rovnice $f(x)=0$ jako x-ové souřadnice průsečíků grafu funkce f s osou x, není příliš pohodlné. Pokusíme se proto o usnadnění a zpřesnění práce tím, že převedeme danou rovnici ekvivalentními úpravami na tvar, který nám poskytne snadno zobrazitelné funkce. V následujícím textu si přiblížíme dvě metody grafického řešení kubických rovnic.

Obě metody mají společné to, že po sestrojení pevné kubické křivky nebo kuželosečky můžeme zbytek řešení dorýsovat jen za pomoci pravítka (přímku) nebo kružítka (kružnici).

5.1 Užití pevné kubické křivky a přímky

Mějme kubickou rovnici

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0. \tag{5.1}$$

Použijeme substituci $x = z - \frac{a_1}{3}$ a převedeme rovnici (5.1) na redukovaný tvar

$$z^3 + pz + q = 0 \tag{5.2}$$

a po ekvivalentní úpravě na tvar

$$z^3 = -pz - q \, . \tag{5.3}$$

Nyní máme na levé straně rovnice funkci $f: \ y = z^3$ a na pravé funkci $g: \ y = -pz - q$. Sestrojíme nejprve graf funkce f, kterým je kubická parabola. Dále budeme hledat průsečíky přímky $y = -pz - q$ s touto parabolou. Souřadnice z dají hledané řešení rovnice (5.2). Dosazením do substituce $x = z - \frac{a_1}{3}$ získáme řešení původní rovnice (5.1).

Poznámka: Jak už název kapitoly napovídá, je výhodné užít pevné (předem sestrojené) kubické paraboly a (proměnlivé) přímky. Při řešení několika rovnic si tím velmi usnadníme práci.

5.2 Užití pevné kuželosečky a kružnice

Přirozeným grafickým řešením kubické rovnice se zdá být užití dvou kuželoseček. Můžeme vybírat ze dvou postupů.

1. k dané rovnici hledat vhodné kuželosečky
2. volit dvě kuželosečky a hledat rovnice, které lze jejich užitím řešit

Pokud máme například rovnici

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

můžeme ji považovat za výsledek eliminace proměnné y z rovnic

$$x^2 = y, \qquad xy + ay + bx + c = 0.$$

První je rovnice paraboly, druhá rovnice rovnoosé hyperboly se středem $(-a,\ -b)$.

Pokud bychom naopak chtěli zvolit dvě kuželosečky, je nejlépe zvolit za jednu kružnici, kterou lze jednoduše narýsovat pomocí kružítka. Zvolme pevnou parabolu a kružnici.

Metodu nejprve ukážeme na grafickém řešení rovnice čtvrtého stupně tvaru

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0\,. \tag{5.4}$$

Pokud zvolíme $y = x^2$, můžeme danou rovnici upravit na tvar

$$y^2 + x^2 + (p-1)y + qx + r = 0\,, \tag{5.5}$$

odkud po úpravě dostaneme

$$\left(x + \frac{q}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1-p}{2}\right)^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-p}{2}\right)^2 - r\,. \tag{5.6}$$

To je vyjádření rovnice kružnice se středem

$$S = \left[-\frac{q}{2},\ \frac{1-p}{2}\right] \tag{5.7}$$

a poloměrem

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-p}{2}\right)^2 - r}\,. \tag{5.8}$$

Souřadnice x průsečíků paraboly $y = x^2$ a kružnice (5.6) dají hledané řešení rovnice (5.4).

Nyní se vrátíme k řešení kubické rovnice tvaru

$$x^3 + px + q = 0\,, \tag{5.9}$$

kterou upravíme na tvar rovnice čtvrtého stupně

$$x^4 + px^2 + qx = 0. \tag{5.10}$$

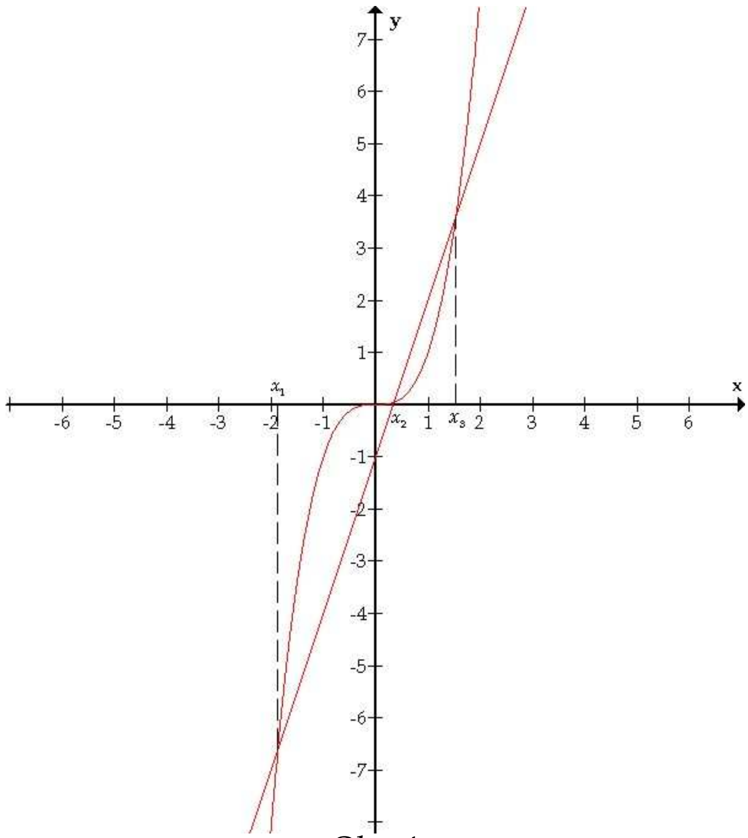
Kořeny této rovnice dostaneme jako x-ové souřadnice průsečíků paraboly $y = x^2$ a kružnice se středem (5.7) a poloměrem (5.8), kde $r = 0$. Kružnice tedy prochází vrcholem paraboly. Rovnice (5.9) má stejné kořeny jako rovnice (5.10) s výjimkou kořene $x = 0$.

Obdobným způsobem bychom mohli řešit kubickou rovnici pomocí pevné elipsy (nebo pevné hyperboly) a kružnice. O těchto a jiných grafických metodách se lze dočíst v knize L. Seiferta [19] a uvádět je zde nebudeme.

Příklad 18:

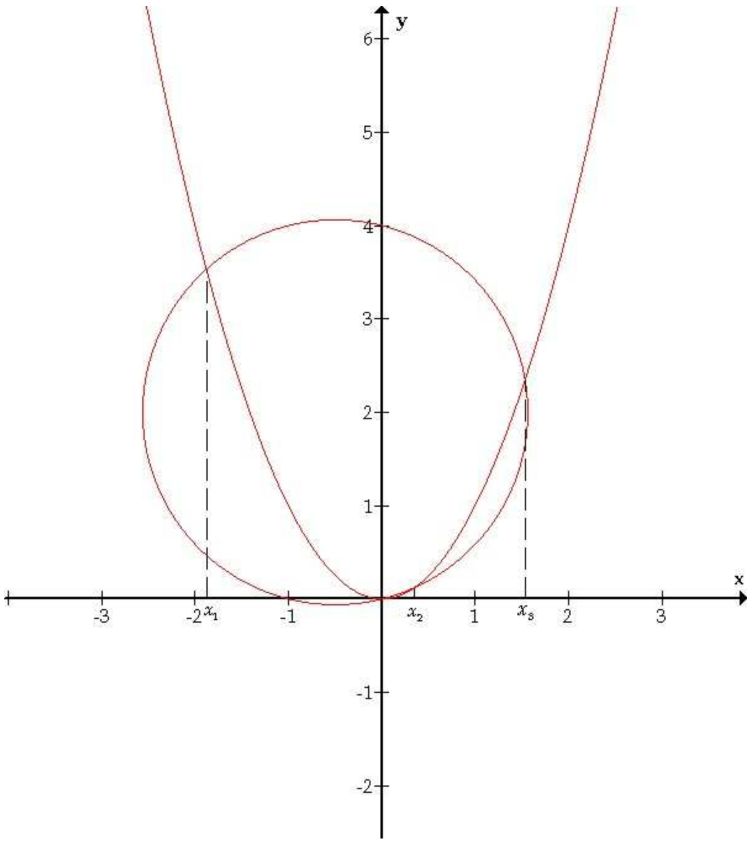
Řešte graficky rovnici $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Danou rovnici převedeme na tvar $x^3 = 3x - 1$, sestrojíme pevnou kubickou parabolu a poté narýsujeme přímku $y = 3x - 1$. Souřadnice x průsečíků přímky a paraboly dávají řešení rovnice (viz obr. 4).



Obr. 4

Rovnici vyřešíme i pomocí druhé metody. Upravíme ji na tvar $x^4 - 3x^2 + x = 0$. Hledáme průsečíky paraboly $y = x^2$ a kružnice $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = 4,25$. Jejich x-ové souřadnice (kromě $x=0$) jsou kořeny rovnice $x^3 - 3x + 1 = 0$ (viz obr. 5).



Obr. 5

6 Kubické rovnice na středních školách

Dnešní školství je, z pohledu didaktiky, pole velmi dynamické, a tak se učitelé mohou setkat s novými přístupy, metodami i postupy, které se dříve vyskytovaly pouze sporadicky. Tyto nové trendy si kladou za cíl provést žáka učivem co neefektivněji, což znamená s co nejširší škálou nově nabytých vědomostí. Tímto se nám tedy otevírá svět možností, které při vhodném využití mohou obohatit a zkvalitnit výuku.

Matematika bývá z didaktického hlediska poměrně opomíjenou oblastí, zejména díky značné exaktnosti, avšak tento obor může být didakticky velmi zajímavý cíl, právě díky oné exaktnosti. V didaktice matematiky se setkáváme s několika úskalími, které je nutné vzít v potaz. Mezi tato úskalí se řadí například vysoká abstraktnost matematiky, nutnost znalosti nižších prvků, dále zvolení vhodné motivace a nutnost nahlížení na matematiku jiným úhlem pohledu, než jen na soubor vztahů, pouček a vzorců.

První oblastí, které je nutné věnovat pozornost, je abstraktnost matematiky a její co nejvhodnější uvedení do praxe. K lepšímu pochopení souvislostí slouží grafické metody, které žákovi ryze abstraktní jev přiblíží a zkonkretizují. K tomu, aby byl žák schopen graficky vyjádřit kubickou rovnici, je ale nutné mít již předchozí znalosti. Grafické řešení rovnic prvního a druhého stupně se tedy považuje za jakýsi vstupní předpoklad pro následné řešení rovnic vyšších stupňů.

Zmíníme se také o velmi problematické oblasti v didaktice matematiky a tou je motivace. Matematika ve svém prvopočátku je nenahraditelnou součástí vzdělání a její základy nás budou vždy provázet po celý život. Ve vyšším stupni vzdělání se tato praktická funkce pomalu vytrácí a nahrazuje ji přirozená potřeba pochopení abstraktního vnímání světa kolem nás, a v tom je právě matematika jednou z nejvhodnějších věd. Je nutné však podotknout, že vyšší matematika má i své praktické cíle a využití například v přírodních vědách, chemii, fyzice, které se díky matematickým zákonitostem mohou dále rozvíjet. Zaměříme-li se blíže na kubické rovnice, lze všeobecně říci, že rovnice vyšších stupňů mohou popisovat fyzikální děje, s jejichž výsledky je možné dále pracovat.

Během výuky je nezbytné chápat každého žáka jako individualitu a oprostit se od představy třídy jako celku. Každý žák vnímá danou látku svým tempem, a tak je nutné udržovat neustálý kontakt se třídou, jako skupinou individualit. Umění zastavit výuku ve vhodný okamžik a vrátit se k předešlému, společně s vnímavostí k myšlenkovým pochodům žáků, by mělo patřit ke standardní části výkladu. Učitel by měl být připraven se v takovém případě vrátit a doplnit dané nedostatky ve vědomostech, aby mohl opět navázat novou látkou. Zjistíme-li neúplnou znalost v řešení rovnic prvního a druhého stupně, není možné navázat rovnicemi vyšších stupňů.

K dosažení cíle je důležité zvolit vhodnou metodu, díky které daného cíle dosáhneme. Při výuce kubických rovnic můžeme použít práci ve dvojicích i skupinkách v případě, že žáci dostanou úkol, na jehož postup musí sami přijít, a je tedy výhodnější, aby nepracovali individuálně a mohli sdílet své poznatky a nápady.

6.1 Kubické rovnice v osnovách škol

Při určování zastoupení učiva o kubických rovnicích na gymnáziích je zde využíván Rámcový vzdělávací program pro gymnázia, podle kterého všechna gymnázia vyučují od 1. 9. 2009. Když do něho nahlédneme, zjistíme, že se v něm toto učivo prakticky nevyskytuje. I dříve probírané učivo komplexní čísla a na ně navazující binomické rovnice už tu není obsaženo. Zvolíme konkrétní gymnázia a jejich Školní vzdělávací programy, abychom se přesvědčili, zdali alespoň některé školy neprobírají toto učivo jako rozšiřující. Vybereme náhodně tři gymnázia. Gymnázium J. K. Tyla v Hradci Králové, Podještědské gymnázium v Liberci a Gymnázium Česká Lípa. Výsledky hledání můžeme shrnout takto: Na všech těchto školách najdeme v různých ročnících učivo o lineárních a kvadratických rovnicích, lineárních, kvadratických a mocninných funkcích. Také komplexní čísla a binomické rovnice na všech třech školách vyučují. Zmínka o nějaké metodě řešení algebraických rovnic vyšších stupňů tu však není. Můžeme se tedy pouze domnívat, že některé speciální případy rovnic vyšších stupňů (tedy i kubických) jsou řešeny v rámci metody substituční či rovnic v součinovém tvaru.

Na středních odborných školách u oborů zakončených maturitní zkouškou je situace obdobná jako na gymnáziích. Vybereme pouze některé z několika desítek oborů. Když srovnáme Rámcové vzdělávací programy oborů strojírenství, stavebnictví a obchodní akademie, zjistíme, že co se týče osnov předmětu matematika, texty jsou téměř totožné. Opět zde najdeme lineární a kvadratické rovnice, lineární, kvadratické a racionální funkce. Komplexní čísla jsou zde doporučena jako rozšiřující učivo, ale o binomických rovnicích se nezmiňují.

6.2 Zavedení kubických rovnic na středních školách

Abychom mohli rovnice třetího stupně vyučovat na střední škole, musíme si nejprve odpovědět na několik otázek:

1. Na jakém typu školy?
2. V jakém ročníku?
3. V rámci hodin matematiky nebo na seminářích?
4. Jaké metody zvolit?
5. Jakou formu výuky?

Výběr typu školy závisí na učebních osnovách (jaké učivo matematiky je probíráno) a také na hodinové dotaci. Je zřejmé, že na gymnáziu s rozšířenou výukou matematiky budou nesrovnatelně lepší podmínky pro výuku řešení kubických rovnic než na střední odborné škole s humanitním zaměřením. Ze všech typů škol má nejlepší předpoklady pro úspěšné zvládnutí daného učiva gymnázium. Také některé střední odborné školy s technickým zaměřením mohou být dobrou volbou.

Otázka, v jakém ročníku řešení kubických rovnic probírat, závisí především na učivu, které by měl žák zvládnout dříve. Zejména dobré pochopení učiva týkajícího se řešení lineárních a kvadratických rovnic probírané obvykle v prvním ročníku středních škol je důležitou podmínkou. Dalším učivem, které by měl žák zvládnout dříve, než začne řešit kubickou rovnici, jsou funkce (obvykle 2. ročník) a případně i komplexní čísla (vyučovalo se ve 3. ročníku, v dnešní době spíše ve 4. ročníku nebo se neučí vůbec). Vzhledem k tomu, že si nyní každá škola může zmíněné učivo zařadit do ročníků podle sebe, není možné přesně určit, kdy kubické rovnice vyučovat. Protože budeme volit metody, které nevyžadují řešení v komplexním oboru, je možné danou látku zařadit do výuky hned po probrání učiva o rovnicích a funkcích.

Volba, jestli zvolit hlavní předmět matematika nebo seminář či cvičení, není nejpodstatnější. V seminářích bývá obvykle na rozšiřující učivo více času, nicméně ne každé gymnázium je nabízí.

Dostáváme se k samotným metodám řešení kubických rovnic. Vybereme dvě z mnoha metod, které se nabízejí. První metodou bude grafické řešení kubických rovnic, druhou pak řešení pomocí snížení stupně rovnice. Je jasné, že bychom jich mohli vybrat mnohem více, není to ale účelem, a také se nabízí otázka, jestli bychom na to měli dostatečnou hodinovou dotaci.

Metoda grafická je zde volena hlavně pro svoji názornost, metoda řešení snížením stupně rovnice pro svoji jednoduchost. Obě metody budou blíže popsány v přípravách na hodinu (viz dále), uveďme nyní alespoň jejich shrnutí.

Žáci budou rozděleni do skupin po čtyřech. Tuto formu vyučování volíme záměrně pro lepší motivaci žáků. Budou tak moci spolupracovat v rámci jednotlivých skupin, ale zároveň soutěžit se skupinami jinými. Další motivací bude pro žáky skutečnost, že za své snažení (odpovědi na otázky, jednotlivé úkoly) budou odměňováni body a na konci budou vyhlášeni nejlepší.

Rozvrhneme nyní čas tak, abychom v něm nebyli omezováni. Rozdělíme probíranou problematiku celkem do pěti vyučovacích hodin, z nichž ta poslední bude rezervní pro případ nedostatku času. Náplní prvních dvou bude opakování látky o rovnicích a funkcích tak, abychom mohli na toto učivo plynule navázat. Ve třetí hodině se budeme věnovat grafickému řešení kubických rovnic a v hodině čtvrté pak probereme (či spíše „neprobereme“) algebraické řešení kubických rovnic, uvedeme Viètovy vzorce a ukážeme jejich použití a nakonec budeme kubické rovnice řešit snížením stupně na rovnici kvadratickou za pomoci uhodnutí jednoho kořene.

Přípravy na hodinu

Plán hodiny č. 1

Téma hodiny: Opakování funkcí, vlastnosti a grafy funkcí.

Cíle hodiny: Žáci si zopakují důležité vlastnosti funkcí (funkce rostoucí, klesající, prostá, omezená, sudá, lichá; maximum a minimum funkce), funkce lineární, kvadratické a mocninné s přirozeným exponentem. Budou znát grafy těchto funkcí a jak je sestrojit, budou umět vyčíst z grafu uvedené vlastnosti.

Předpokládané znalosti: Funkce (učivo druhého ročníku gymnázia).

Předpokládané problémy: Žáci už některé části učiva o funkcích zapomněli, hodina by se mohla změnit z opakovací na výkladovou.

Materiály: Milimetrové papíry s předem připravenou kartézskou soustavou souřadnic.

Organizace práce: Skupinová výuka.

Průběh hodiny: Žáci se rozdělí do skupin po čtyřech a určí si svého vedoucího. Každá skupina dostane jednu otázku na úvod a bude mít chvilku na poradu. Za správnou odpověď si skupina připíše bod.

Otázky: 1. Co je funkce, 2. Co je definiční obor funkce, 3. Obor hodnot funkce, 4. Lineární funkce – předpis, graf, 5. Kvadratická funkce – předpis, graf, 6. Mocninné funkce – předpis, graf

Učitel uvede na pravou míru nepřesné či špatné odpovědi.

(délka aktivity cca 10 min.)

V další části hodiny budeme opakovat důležité vlastnosti funkcí. Žáci budou mít za úkol uvedenou vlastnost popsat, určit, jak ji poznáme z grafu, a demonstrovat na příkladu. Každá skupina opět dostane jeden úkol, za jehož splnění bude ohodnocena body.

Úkoly: 1. Funkce rostoucí a klesající, 2. Funkce prostá, 3. Funkce omezená, 4. Funkce sudá, 5. Funkce lichá, 6. Maximum a minimum funkce.

Vedoucí skupin poté mají za úkol demonstrovat splněné úkoly na tabuli, zbylé skupiny hledají a opravují případné chyby.

(délka aktivity cca 20 min.)

V poslední části hodiny žáci společnými silami vytvoří na tabuli přehled s lineární, kvadratickou a mocninnou funkcí se všemi vlastnostmi popsanými dříve, které tyto funkce mají.

(délka aktivity cca 15 min.)

Domácí úkol: Na milimetrové papíry s připravenou kartézskou soustavou souřadnic sestrojte graf funkce $f:\ y = x^2$ (každý žák 3 ks).

Plán hodiny č. 2

Téma hodiny: Kvadratická funkce, grafické řešení kvadratické rovnice.

Cíle hodiny: Cílem této hodiny je připomenutí, jakým způsobem sestrojujeme grafy obecných kvadratických funkcí a jak těchto znalostí využíváme při grafickém řešení kvadratických rovnic. Žák by měl být na konci hodiny schopen řešit graficky kvadratickou rovnici.

Předpokládané znalosti: Funkce (učivo druhého ročníku gymnázia), lineární a kvadratické rovnice (učivo prvního ročníku gymnázia).

Materiály: Milimetrové papíry s předem připravenou kartézskou soustavou souřadnic a grafy funkce $y = x^2$.

Organizace práce: Skupinová výuka.

Průběh hodiny: Žáci dostanou úkoly, které budou řešit v rámci jednotlivých skupin. Každá skupina za správné řešení získá určité množství bodů.

Úkol 1: Do téže kartézské soustavy souřadnic sestrojte ke grafu funkce $f: y = x^2$ také grafy funkcí $f_1: y = \frac{1}{3}x^2$ a $f_2: y = 3x^2$. Sestrojte ještě grafy $f_3: y = -\frac{1}{3}x^2$ a $f_4: y = -3x^2$.

Otázka 1: Jaký pozorujete mezi grafy f_1, f_2 rozdíl? A jaký mezi grafy f_1, f_3? *(délka aktivity cca 10 min)*

Úkol 2: Do téže kartézské soustavy souřadnic sestrojte postupně grafy funkcí

$$h_1 :\ y = \frac{1}{2}x^2,\ h_2 :\ y = \frac{1}{2}x^2 + 3,\ h_3 :\ y = \frac{1}{2}(x-1)^2,\ h_4 :\ y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3.$$

Při rýsování grafu následujícího využijte vždy znalosti grafů předchozích.

Otázka 2: Čím se liší grafy funkcí h_2, h_3 oproti grafu funkce h_1?

(délka aktivity cca 15 min)

Úkol 3: Vhodnými úpravami přepište funkci

$h_4 :\ y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3$ na tvar $y = ax^2 + bx + c$ ($h_4 :\ y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{7}{2}$).

Otázka 3: Umíme snadno sestrojit graf funkce v tomto obecném tvaru? (odpověď: ne) Jak se říká úpravě, po které funkce h_4 přejde na tvar $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3$? (odpověď: Doplnění na druhou mocninu dvojčlenu.)

(délka aktivity cca 3 min)

V další části hodiny přejdeme ke grafickému řešení kvadratických rovnic. Nejprve zvolíme způsob, kterým žáci tyto rovnice graficky již řešili.

Otázka 4: Na jaký tvar upravíme (pomocí ekvivalentních úprav) kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$, abychom na pravé straně dostali funkci, jejímž grafem je přímka? (odpověď: Rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ přepíšeme na tvar $x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$.) Proč tuto úpravu děláme? (odpověď: Grafy funkcí $y = x^2$ a $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ snáze narýsujeme než graf funkce

$y = ax^2 + bx + c$). Jak najdeme kořeny rovnice? (odpověď: Jako x-ové souřadnice průsečíků grafů $y = x^2$ a $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$.)

Úkol 4: Vyřešte graficky rovnici $x^2 - x - 2 = 0$ (upravením rovnice na tvar $x^2 = x + 2$).

Úkol 5: Vyřešte znovu graficky rovnici $x^2 - x - 2 = 0$, tentokrát volte odlišný způsob řešení, kořeny hledejte jako x-ové souřadnice průsečíků grafu funkce f : $y = x^2 - x - 2$ s osou x.

Otázka 5: Jaký tvar bude mít výraz $x^2 - x - 2$ po doplnění na druhou mocninu dvojčlenu? (odpověď: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$)

Otázka 6: Který způsob je pro nás výhodnější?

(délka aktivity cca 15 min.)

Domácí úkol: Na milimetrové papíry s připravenou kartézskou soustavou souřadnic sestrojte graf funkce f : $y = x^3$ (každý žák 3 ks).

Plán hodiny č. 3

Téma hodiny: Kubická rovnice, grafické řešení kubické rovnice.

Cíle hodiny: Žáci se naučí na základě znalosti grafického řešení kvadratické rovnice řešit graficky rovnici kubickou.

Předpokládané znalosti: Funkce (učivo druhého ročníku gymnázia), lineární a kvadratické rovnice (učivo prvního ročníku gymnázia).

Materiály: Milimetrové papíry s předem připravenou kartézskou soustavou souřadnic a grafy funkce $y = x^3$.

Organizace práce: Skupinová výuka.

Průběh hodiny: Navážeme na předchozí hodinu a vztáhneme ke kubickým rovnicím. Rovnice 3. stupně se nazývá kubická rovnice. Napíšeme na tabuli obecný tvar kubické rovnice $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Otázka 1: Kolik má rovnice nejvýše (reálných) kořenů? Vyjděte ze znalosti téhož u rovnic 1. a 2. stupně. (odpověď: 3)

Budeme se snažit o grafické řešení kubické rovnice.

Otázka 2: Jakými způsoby jsme graficky řešili kvadratickou rovnici? Jaký způsob zvolíme u kubické rovnice? Proč? (odpověď: Sestrojit graf funkce $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ by bylo velmi obtížné…)

Otázka 3: Na jaký tvar si tedy tuto rovnici převedeme? (odpověď:

$x^3 = -\frac{b}{a}x^2 - \frac{c}{a}x - \frac{d}{a}$)

Otázka 4: Jakým způsobem najdeme kořeny této rovnice? (odpověď: Jako x-ové souřadnice průsečíků grafů funkcí $y = x^3$ a $y = -\frac{b}{a}x^2 - \frac{c}{a}x - \frac{d}{a}$.)

Úkol 1: Řešte graficky rovnici $x^3 - x^2 + x + 2 = 0$.

Rovnici upravíme na tvar $x^3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ a najdeme průsečíky.

(délka aktivity cca 15 min)

Otázka 5: Jaký člen v rovnici přebývá, abychom ji graficky řešili, obdobně jako kvadratickou rovnici, nalezením průsečíků grafů (a jejich x-ových souřadnic) funkce mocninné (na levé straně rovnice) a lineární (na pravé straně rovnice)? (odpověď: kvadratický)

Otázka 6: Myslíte, že bychom se mohli kvadratického členu zbavit? Jak? (žáci hádají, třeba zazní i možnost vhodné substituce)

Napíšeme na tabuli substituci $x = z - \frac{b}{3}$ a zdůrazníme, že rovnice musí být v normovaném tvaru.

Úkol 2: Ověřte na rovnici $x^3 - x^2 + x + 2 = 0$, že při užití substituce $x = z - \frac{b}{3}$ (v tomto případě $x = z + \frac{1}{3}$) se zbavíme kvadratického členu. (Žáci po dosazení do substituce dostanou rovnici $z^3 + 2z + \frac{13}{27} = 0$.) *(délka aktivity cca 10 min.)*

Budeme tedy graficky řešit rovnici $z^3 + 2z + \frac{13}{27} = 0$ a kořeny původní rovnice dostaneme po dosazení do substituce. Upravíme na tvar $z^3 = -2z - \frac{13}{27}$ a hledáme průsečíky kubické paraboly a přímky.

Úkol 3: Řešte graficky rovnici $x^3 - x^2 + x + 2 = 0$ pomocí substituce $x = z + \frac{1}{3}$, a ověřte, že kořeny rovnice jsou stejné jako v úkolu 1.

Úkol 4: Soutěž skupin. Řešte graficky rovnici $x^3 - x^2 - 4x + 3 = 0$. Způsob řešení zvolte podle svého uvážení. Nejrychlejší skupina získává body. Na řešení se podílejte všichni ve skupině, vytvořte jedno společné řešení. *(délka aktivity cca 15 min.)*

Závěr: naučili jsme se graficky řešit kubické rovnice dvěma způsoby.

Plán hodiny č. 4

Téma hodiny: Algebraické řešení kubické rovnice, Viètovy vzorce, snížení stupně rovnice.

Cíle hodiny: Žáci se dozví, že algebraické řešení kubické rovnice je příliš složité a proto musí volit jiné metody řešení. Žáci odvodí Viètovy vzorce pro kubickou rovnici a vypočítají jednoduchý příklad, kde tyto vzorce využijí. Také se naučí řešit kubickou rovnici snížením stupně této rovnice při znalosti jednoho kořenu.

Předpokládané znalosti: Řešení lineární a kvadratické rovnice (učivo prvního ročníku gymnázia), vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

Materiály: Papíry s Cardanovými vzorci pro výpočet kořenů kubických rovnic.

Organizace práce: Skupinová výuka.

Průběh hodiny: Pro algebraické řešení lineárních ($ax+b=0$) a kvadratických ($ax^2+bx+c=0$) rovnic užíváme známých vzorců. Napíšeme na tabuli tyto vzorce ($x=-\frac{b}{a}$ resp. $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; žáci tyto vzorce říkají sami, učitel pouze zapisuje).

<u>Otázka 1:</u> Myslíte, že existují podobné vzorce i pro kořeny kubické rovnice?

Řekneme si, že sice ano, ale že jsou natolik složité, že jejich praktické využití je velmi malé, a proto je nebudeme používat. Rozdáme si však papíry s těmito vzorci jako zajímavost.

(délka aktivity cca 5 min.)

Připomeneme si Viètovy vzorce pro vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice. Má-li kvadratická rovnice $ax^2+bx+c=0$, kde $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ a $a\neq 0$, kořeny x_1, x_2, potom platí

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Roznásobením pravé strany a porovnáním koeficientů obou stran rovnice dostaneme

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

<u>Úkol 1:</u> Soutěž skupin na rychlost. Odvoďte Viètovy vzorce pro vztahy mezi kořeny a koeficienty kubické rovnice, když víte, že

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Využijte těchto vzorců pro výpočet kořenů kubické rovnice

$$x^3-8x^2+17x-10=0,$$

pokud víte, že jeden kořen je dvojnásobkem jiného. (řešení: viz příklad 1)

Poznámka: Nejrychlejší tři skupiny se správným řešením získávají body dle pořadí, zástupce nejrychlejší skupiny ukáže řešení na tabuli.

(délka aktivity cca 20 min.)

V další části hodiny uvedeme, jakým způsobem můžeme snížit stupeň rovnice, pokud známe jeden z kořenů. Napíšeme si opět kubickou rovnici ve tvaru $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Pokud známe kořen x_1, nabízí se několik otázek, např.:

Otázka 2: Můžeme vhodnou úpravou rovnice snížit stupeň rovnice? (odpověď: Ano, vydělíme ji dvojčlenem $(x-x_1)$, získáme tak kvadratickou rovnici, kterou snadno vyřešíme.)

Otázka 3: Jak můžeme postupovat, pokud žádný kořen neznáme, přesto ale chceme řešit rovnici snížením stupně rovnice? (odpověď: Pokusíme se ho uhodnout.)

Nemá smysl hledat kořen příliš dlouho, proto ho budeme hledat v nějakém přijatelném intervalu kolem nuly. Dosadíme některá čísla (například $-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3$) a zkoušíme, jestli je levá strana rovnice rovna nule.

Úkol 2: Vyřešte pomocí snížení stupně rovnice rovnici

$$x^3-6x^2+11x-6=0.$$

(řešení: $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$)

Úkol 3: Vyřešte rovnice

$$\begin{aligned} x^3+5{,}5x^2+x-7{,}5=0 &\quad (x_1=1,\ x_2=-5,\ x_3=-1{,}5)\\ x^3-3{,}5x^2-4x+14=0 &\quad (x_1=-2,\ x_2=2,\ x_3=3{,}5)\\ x^3-2x^2-16{,}75x-13{,}75=0 &\quad (x_1=-1,\ x_2=-2{,}5,\ x_3=5{,}5)\\ x^3+9x^2-9x-81=0 &\quad (x_1=-3,\ x_2=3,\ x_3=-9). \end{aligned}$$

Skupina si rozebere každý po jedné rovnici. První skupina, která bude mít vyřešeny všechny rovnice získává body.

(délka aktivity cca 20 min)

7 Porovnání anglické a české středoškolské učebnice

K tomuto krátkému srovnání byly vybrány česká učebnice Matematika pro gymnázia. Rovnice a nerovnice [18], a britská středoškolská učebnice [21]. V české učebnici matematiky pro gymnázia [18] najdeme řešení rovnic vyšších stupňů pouze okrajově. Na zhruba pěti stranách najdeme pět řešených příkladů, z nichž dva se věnují řešení kubické rovnice. Jsou zde uvedeny 2 metody řešení. Snížení stupně rovnice vydělením lineárního dvojčlenu a vhodné vytýkání. Dále je v knize několik příkladů na procvičení. Je zde také uvedeno, že algebraické řešení existuje (pro rovnice 3. a 4. stupně), ale je velmi složité, a proto se mu kniha dále nevěnuje. Grafickým metodám řešení rovnic vyšších stupňů zde není věnován prostor.

V britské učebnici A-level [21] najdeme grafické řešení kubických rovnic a několik úloh na určení kořenů odhadem. Pro procvičování tu je sice několik příkladů, které by nejspíše měly být řešeny algebraicky, není tu však žádný řešený příklad ani komentář. Uvedeme zde jednu úlohu:

Najděte a, b, pro která platí:

$$(2x-a)^3 = 8x^3 + bx + 6a^2x - 27\,.$$

Řešení: $a = 3$, $b = -36$.

Závěr

Cílem práce bylo ukázat některé metody řešení kubických rovnic, a to jak ze současného pohledu, tak také v historickém kontextu. Dále pak zjistit, v jaké míře jsou kubické rovnice zastoupeny v učebních osnovách středních škol a promyslet případné zařazení této látky do výuky na střední škole, zadané cíle byly v práci splněny.

Práce je řazena do několika částí. V první kapitole jsou stručně vyloženy některé základní pojmy, které jsou v práci dále používány, a na které je často odkazováno. Tyto pojmy jsou v podobě definic, vět a jejich komentářů předkládány bez důkazů, které je možno najít v uvedené použité literatuře.

Kapitola druhá shrnuje historický vývoj matematiky s důrazem na řešení kubických rovnic, a to od starověku až po 16. století, kdy došlo k průlomovému objevu metody algebraického řešení obecné kubické rovnice. Zasloužili se o to italští matematikové v čele s G. Cardanem, který metodu řešení publikoval. I když se našly případy, kdy tato metoda selhávala (casus irreducibilis), měly tzv. Cardanovy vzorce nesmírný význam jak z pohledu řešení kubických rovnic, tak z pohledu celé algebry. Vedly totiž k postupnému uznání záporných čísel a studiu druhých odmocnin ze záporných čísel, tj. čísel komplexních.

Třetí část se věnuje vlastnímu řešení kubických rovnic. Je zde podán výklad algebraického řešení kubické rovnice, který od jeho publikování G. Cardanem v 16. století nedoznal zásadních změn. Také tu je popsán irreducibilní případ řešení, kdy jsou reálné kořeny vyjádřeny pomocí druhých odmocnin z komplexních čísel, a jeho možné vyřešení tím, že vyjádříme komplexní čísla v goniometrickém tvaru (goniometrické řešení kubické rovnice). Na závěr této kapitoly jsou zde ještě řešeny dva speciální případy algebraických rovnic – rovnice binomické a reciproké.

Algebraické řešení je velmi důležité, avšak ne vždy použitelné v praxi. Z tohoto důvodu se ve čtvrté části věnujeme přibližným metodám řešení, se kterými se setkáváme častěji. Podrobně probrány jsou čtyři metody – metoda půlení intervalu, metoda prosté iterace, metoda tětiv a metoda tečen. Uvedeny jsou hlavní výhody či nevýhody těchto metod a vše je ilustrováno na příkladu, ve kterém je jedna kubická rovnice řešena všemi čtyřmi metodami. Snadno tak můžeme jednotlivé metody porovnat.

V následující, páté kapitole jsou vysvětleny 2 možnosti grafického řešení kubické rovnice. První z nich spočívá v hledání průsečíků pevné kubické paraboly a přímky, druhé pak v hledání průsečíků pevné kuželosečky (v našem případě paraboly) a kružnice.

Šestá, předposlední kapitola ukazuje možnosti, jakým způsobem by kubické rovnice mohly být vyučovány na střední škole. Zjišťuje, že tato látka v současných učebních osnovách středních škol prakticky není zastoupena. Z mnohých metod jsem vybral dvě, o kterých si myslím, že by mohly být pro řešení kubických rovnic na středních školách vhodné. První z nich je grafická metoda řešení, druhou potom metoda řešení snížením stupně rovnice. Je zde kladen důraz na to, aby žáci co nejvíce přemýšleli o možnostech řešení a pokud možno samostatně pracovali na dílčích problémech. Pro lepší motivaci žáků je zvolena skupinová forma výuky. Podrobně je probíraná látka popsána v přípravách na jednotlivé hodiny.

V poslední kapitole je krátké porovnání jedné české a jedné zahraniční učebnice pro střední školy.

Rovnice vyšších stupňů jsou na českých středních školách učivem poměrně opomíjeným. Tato diplomová práce tuto skutečnost asi nezmění, nicméně může pomoci některým pedagogům jako pomůcka při začleňování této problematiky do hodin matematiky. Je v ní uvedeno několik zcela odlišných metod řešení, které doprovází velké množství řešených příkladů. Prvních pět částí je vyloženo podrobněji. V šesté části zcela jistě mohly být využity i jiné metody řešení než navržené dvě, nebylo však cílem postihnout úplně vše. Ani by to nebylo možné, z časových důvodů, v hodinách matematiky realizovat.

Tato práce objasnila mnohé oblasti, týkající se tématu řešení kubických rovnic, přesto by bylo možné na ni navázat. Další výzkumy by se mohly týkat uvedení již zde zmíněných příprav do praxe, a tím toto téma obohatit o další cenná zjištění. Věřím, že tato práce bude přínosem nejen pro mne, ale také pro řadu středoškolských pedagogů, které tato problematika zajímá.

Použitá literatura

[1] Struik, Dirk J.: *Dějiny matematiky.* Praha: Orbis, 1963. 250 s.

[2] Kolman, A.: *Dějiny matematiky ve starověku.* Praha: Academia, 1968. 221 s.

[3] Balada, F.: *Z dějin elementární matematiky.* Praha: SPN, 1959. 238 s.

[4] Folta, J.: *Věstonická vrubovka* [online]. Publikováno: Vesmír 76, 310, 1997/6. [cit. 2010-04-23]. Dostupné z <http://www.vesmir.cz/clanek/vestonicka-vrubovka>.

[5] Bečvář, J. − Bečvářová, M. − Vymazalová, H.: *Matematika ve Starověku. Egypt a Mezopotámie.* Praha: Prometheus, 2003. 371 s. ISBN 80-7196-255-4.

[6] Bečvář, J. a kol.: *Matematika ve středověké Evropě.* Praha: Prometheus, 2001. 445 s. ISBN 80-7196-232-5.

[7] Juškevič, A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku*. Praha: Academia, 1978. 446 s.

[8] Folta, J.: *Dějiny přírodních věd v datech.* Praha: Mladá fronta, 1979. 359 s.

[9] Rektorys, K.: *Přehled užité matematiky.* Praha: SNTL, 1981. 1139 s.

[10] Jarník, J. − Šisler, M.: *Jak řešit rovnice a jejich soustavy*. Praha: SNTL, 1969. 243 s.

[11] Šisler, M. − Andrys, *J.: O řešení algebraických rovnic.* Praha: Mladá fronta, 1966. 128 s.

[12] Schwarz, Š.: *Základy náuky o riešení rovníc.* Bratislava: SAV, 1967. 440 s.

[13] Drábek, J. − Hora, J.: *Algebra – Polynomy a rovnice.* Plzeň: 2001.

[14] Krutský, F.: *Polynomy neurčitých řešení algebraických rovnic.* Olomouc: Univerzita Palackého, 1991. 57 s. ISBN 80-7067-636-1.

[15] Míka, S.: *MVŠT. Numerické metody algebry.* Praha: SNTL, 1982. 169 s.

[16] Nekvinda, M. − Šrubař, J. − Vild, J.: *Úvod do numerické matematiky.* Praha: SNTL, 1976. 285 s.

[17] Ralston, A.: *Základy numerické matematiky.* Praha: Academia, 1978. 635 s.

[18] Charvát, J. − Zhouf, J. − Boček, L.: *Matematika pro gymnázia. Rovnice a nerovnice.* Praha: Prometheus, 2006. 222 s. ISBN 80-7196-154-X.

[19] Seifert, L.: *Kubické a bikvadratické problémy.* Praha: Přírodovědné vydavatelství, 1951. 102 s.

[20] Bečvář, J. − Fuchs, E.: *Matematika v 16. a 17. století.* Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-150-7.

[21] Bostock, L. − Chandler, S.: *Core Maths for A-level*. London, 1990.

[22] Odvárko, O. − Calda, E. − Šedivý, J. − Židek, S.: *Metody řešení matematických úloh.* Praha: SPN, 1990. 261 s. ISBN 80-04-20434-1.

[23] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky.* Praha: Prometheus, 2002. 608 s. ISBN 80-7196-196-5.

[24] Kořínek, V: *Základy algebry.* Praha: 1956. 520 s.

[25] Šik, F: *Algebra I (Polynomy a algebraické rovnice).* Praha: SPN, 1962. 94 s.

[26] Odvárko, O.: *Matematika pro gymnázia. Funkce*. Praha: Prometheus, 1993. 160 s. ISBN 80-85849-09-7.

[27] VÚP Praha: *Rámcový vzdělávací program pro gymnaziální vzdělávání* [online]. 30. 7. 2007 [cit. 2010-11-15]. Dostupné z <http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPG-2007-07_final.pdf>.

[28] Gymnázium J. K. Tyla: *Školní vzdělávací program* [online]. 27. 8. 2009 [cit. 2010-12-01]. Dostupné z < http://www.gjkt.cz/files/svp_kompletni.pdf>.

[29] Podještědské gymnázium Liberec: *Školní vzdělávací program* [online]. 1. 9. 2009 [cit. 2010-12-01]. Dostupné z <http://www.pglbc.cz/files/svp/svp_index.php>.

[30] Gymnázium Česká Lípa: *Školní vzdělávací program* [online]. 1. 9. 2009 [cit. 2010-12-01]. Dostupné z < http://www.gym-cl.cz/images/stories/svp/vyssiG_od_2009.pdf>.

[31] NOV Praha: *Rámcový vzdělávací program pro obory středního vzdělání s maturitní zkouškou, 2341M01, Strojírenství* [online]. 28. 6. 2007 [cit. 2010-12-02]. Dostupné z <http://zpd.nuov.cz/RVP/ML/RVP%202341M01%20Strojirenstvi.pdf>.

[32] NOV Praha: *Rámcový vzdělávací program pro obory středního vzdělání s maturitní zkouškou, 3647M01, Stavebnictví* [online]. 28. 6. 2007 [cit. 2010-12-02]. Dostupné z <http://zpd.nuov.cz/RVP/ML/RVP%203647M01%20Stavebnictvi.pdf>.

[33] NOV Praha: *Rámcový vzdělávací program pro obory středního vzdělání s maturitní zkouškou, 6341M02, Obchodní akademie* [online]. 28. 6. 2007 [cit. 2010-12-02]. Dostupné z

<http://zpd.nuov.cz/RVP/ML/RVP%206341M02%20Obchodni %20akademie.pdf>.